

MA-505: ANÁLISIS I

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

I Ciclo Lectivo del 2017

Introducción

Este curso de análisis pretende ser una transición entre las materias de sucesiones y series, derivadas e integrales, vistas de modo algorítmico en cursos anteriores, y el estudio colectivo de los espacios de funciones integrables y distribuciones, en cursos posteriores. Se caracteriza por un mayor rigor en su desarrollo, aun cuando su temática sea menos amplia.

El curso comienza con el estudio/repaso de algunos aspectos importantes de funciones de una variable real. Luego se abre al análisis en varias variables, con indicaciones de estructuras más generales (espacios métricos y espacios normados). Culmina con un examen de fenómenos de continuidad y convergencia en la presencia de ortogonalidad (espacios de Hilbert).

Temario

Prolegómenos sobre análisis en la recta real Los números reales \mathbb{R} y números complejos \mathbb{C} . Funciones continuas, valores intermedios. Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy, la completitud de \mathbb{R} . Convergencia uniforme, la prueba- M de Weierstrass para series de funciones. Polinomios de Bernstein, aproximación de funciones continuas por polinomios.

Espacios métricos y su topología Conjuntos abiertos y cerrados en \mathbb{R}^n , vecindarios de un punto. Conjuntos compactos en \mathbb{R}^n , el teorema de Heine y Borel. Espacios métricos en general, ejemplos. Espacios métricos completos, la completión de un espacio métrico. Conjuntos conexos y conexos por caminos en \mathbb{R}^n .

Espacios normados y espacios de funciones Normas en \mathbb{R}^n , normas de funciones con valores reales o complejas, equivalencias entre normas. Series en un espacio normado, series absolutamente convergentes. Aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados, extensiones de formas lineales. Diferenciación en espacios normados, la regla de la cadena. Espacios de funciones continuas y sus compleciones. El teorema de aproximación de Stone y Weierstrass.

Espacios de Hilbert y series de Fourier Formas hermíticas definidas positivas, productos escalares. La igualdad de Parseval, bases ortonormales. Proyecciones ortogonales, el algoritmo de Gram y Schmidt. Los teoremas de representación de Riesz para los espacios de Hilbert y espacios de funciones continuas. Series de Fourier de funciones periódicas. Núcleos de Dirichlet y de Fejér, problemas de convergencia de las series de Fourier.

Bibliografía

Hay muchos libros de texto que prometen una introducción al análisis matemático al nivel de este curso. He aquí una selección de los más recomendables.

- [1] R. G. Bartle & D. R. Sherbert, *Introducción al análisis matemático de una variable*, Limusa-Wiley, México, DF, 2010.
- [2] S. K. Berberian, *A First Course in Real Analysis*, Springer, Berlin, 1994.
- [3] J. A. Dieudonné, *Fundamentos de análisis moderno*, Reverté, Barcelona, 1979.
- [4] S. Dineen, *Analysis*, World Scientific, Singapura, 2012.
- [5] J. J. Duistermaat & J. A. C. Kolk, *Multidimensional Real Analysis*, 2 tomos, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [6] P. Duren, *Invitation to Classical Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [7] E. Gaughan, *Introducción al análisis*, Alhambra, Madrid, 1972.
- [8] H. L. Montgomery, *Early Fourier Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.
- [9] W. Rudin, *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill, México, DF, 1980.
- [10] B. S. W. Schröder, *Mathematical Analysis*, Wiley, New York, 2007.
- [11] B. Simon, *Real Analysis* (capítulos 2 y 3), American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [12] N. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

I Prolegómenos sobre análisis en \mathbb{R}

El término *análisis* denota la parte del quehacer matemático que maneja límites; es decir, los conceptos de convergencia y continuidad. Abarca también todos los procesos definidos por límites, en particular el cálculo diferencial e integral en una o varias variables reales o complejos, y en seguida las ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Su temática, entonces, es amplio y vasto. En este curso se pretende tomar los primeros pasos, más allá de la manipulación algorítmica de series, derivadas e integrales, en este terreno abundante y fértil.

El análisis puede abordarse en varios niveles de abstracción. Al inicio, conviene mantenerse en el ámbito \mathbb{R}^n de “varias variables reales”. (Las funciones con dominios en el plano complejo \mathbb{C} , o bien en \mathbb{C}^n , tienen propiedades especiales que merecen ser estudiadas por aparte, en un curso más avanzado.) Poco a poco, el ámbito euclidiano será reemplazado por otros más generales, como son el contexto de los espacios normados y espacios métricos en general.

Antes de enfrentar el espacio vectorial \mathbb{R}^n en varias dimensiones, es prudente hacer un repaso de los aspectos de funciones de una sola variable que forman la base de tal estudio. En este capítulo, se estudiará sucesiones, series y funciones en la recta real \mathbb{R} .

I.1 Los números reales y complejos

Hay un aforismo atribuido a Leopold Kronecker, de que “los números enteros fueron hechos por Dios, todo lo demás es obra del hombre”.¹ Ya es tradicional hacer un desarrollo sucesivo de los siguientes sistemas numéricos en el primer año de la carrera matemática universitaria:

- ★ Los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ de conteo elemental. Aquí se considera 0 como número natural.² Los enteros positivos se denotarán por $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- ★ Los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$.
- ★ Los números racionales $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$.
- ★ Los números reales \mathbb{R} .
- ★ Los números complejos $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$, donde $i = \sqrt{-1}$.

¹Citado por Heinrich Weber en su obituario de Kronecker (1893): *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*. Así quiso expresar, no un ateísmo barato, sino su énfasis sobre la importancia de los procesos finitos en la matemática.

²Los autores franceses usan $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y escriben $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. En cambio, los autores alemanes suelen poner $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. El lector debe cerciorarse si un determinado libro toma 0 como número natural o no. En estos apuntes se adopta el convenio francés.

Las construcciones de \mathbb{Z} a partir de \mathbb{N} , de \mathbb{Q} a partir de \mathbb{Z} , y de \mathbb{C} a partir de \mathbb{R} , son procedimientos algebraicos relativamente fáciles de comprender. En cambio, la construcción de \mathbb{R} a partir de \mathbb{Q} es intrincado y delicado.

Hay dos construcciones principales (con resultados equivalentes): (a) la de Richard Dedekind por medio de sus *cortes de los números racionales*; y (b) la de Georg Cantor mediante *una relación de equivalencia sobre las sucesiones de Cauchy* (racionales).

Un **corte** $\mathbb{Q} = A \uplus B$ expresa los racionales como unión disjunta³ de dos partes A y B donde $a < b$ para todo $a \in A$, $b \in B$. Si $t \in \mathbb{Q}$, se puede tomar $A_t = \{a : a < t\}$ y $B_t = \{b : b \geq t\}$. Al identificar $t \in \mathbb{Q}$ con el corte $\mathbb{Q} = A_t \uplus B_t$, se obtiene $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. El corte $A = \{a : a \leq 0 \text{ o } a^2 < 2\}$, $B = \{a > 0 : a^2 > 2\}$ se identifica con $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Es necesario definir las operaciones de suma y multiplicación de cortes, y el orden entre cortes, para luego mostrar que todas las propiedades deseables de \mathbb{R} se cumplen para esta familia de cortes.

En el enfoque de Cantor, se considera la familia \mathcal{C} de todas las sucesiones de Cauchy en \mathbb{Q} – más adelante se estudiará las sucesiones de Cauchy en detalle – y se declara que dos sucesiones de Cauchy $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son **equivalentes** si la sucesión $\{a_n - b_n\}$ converge a 0. El conjunto cociente \mathcal{C}/\sim se adopta como la *definición* de \mathbb{R} . Aunque este proceso produce un resultado más abstracto que el esquema de Dedekind, tiene la ventaja que las operaciones algebraicas son obvias; por ejemplo, $\{a_n\} + \{b_n\} := \{a_n + b_n\}$ define la suma (al pasar al cociente).

► En adelante, entonces, damos por un hecho la existencia de \mathbb{R} , como un *cuerpo ordenado, arquimediano y completo* que incluye el cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales. Este es el contenido de la siguiente proposición, no demostrado en este curso. (El lector interesado en una demostración completa puede consultar el capítulo 1 del libro de Rudin, o bien el capítulo 2 del libro de Dieudonné.)

Proposición 1.1. *Existe un conjunto \mathbb{R} con las siguientes propiedades:*

- (a) \mathbb{R} es un **cuerpo**,⁴ esto es, \mathbb{R} tiene las dos operaciones algebraicas de suma y multiplicación, ambas asociativas y conmutativas, con una ley distributiva: $a(b + c) = ab + ac$; con dos elementos especiales 0 y 1 tales que $0 + a = a = 1 \cdot a$ para $a \in \mathbb{R}$; para cada $a \in \mathbb{R}$ hay un elemento $-a$, y otro elemento a^{-1} si $a \neq 0$, tales que $a + (-a) = 0$ y $a \cdot a^{-1} = 1$.

³El símbolo \uplus significa **unión disjunta** de dos conjuntos A y B , toda vez que $A \cap B = \emptyset$. Es un caso especial de la “suma booleana” $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ para conjuntos A, B cualesquiera.

⁴El término **cuerpo** viene del alemán *Körper*, un término introducido por Dedekind en 1871; se llama *corps* en francés, *corp* en rumano, etc., pero en inglés se usa la palabra *field*. En español, no debe usarse la traducción secundaria *campo*, que denota campos vectoriales, campos magnéticos, etc.

- (b) El cuerpo \mathbb{R} está **ordenado** por una **relación de orden** $a \leq b$ reflexiva, transitiva, anti-simétrica ($a \leq b$ y $b \leq a$ implican $a = b$) y simple ($a \leq b$ o bien $b \leq a$ para todo a, b), tal que $a \leq b$ implica $a + c \leq b + c$ para todo $c \in \mathbb{R}$; y además $0 \leq a$, $0 \leq b$ implican $0 \leq ab$.
- (c) El cuerpo ordenado \mathbb{R} es **arquimediano**: si $a > 0$ y $b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $na > b$.
- (d) El cuerpo ordenado \mathbb{R} es **completo**: cualquier parte $A \subset \mathbb{R}$ acotada superiormente (existe una cota superior $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ para todo $a \in A$) posee una cota superior mínima (hay $c \in \mathbb{R}$ con $a \leq c$ para $a \in A$ pero $c \leq b$ cuando b es una cota superior de A).
- (e) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. □

Los números racionales \mathbb{Q} constituyen un cuerpo ordenado arquimediano, pero incompleto: por ejemplo, el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0 \text{ o } a^2 < 2\}$ está acotado superiormente, pero no posee una cota superior mínima.

Hay cuerpos ordenados completos que no son arquimedianos. Un ejemplo es el conjunto $\mathbb{R}(t)$ de *funciones racionales* en una incógnita t ; esto es, cocientes de dos polinomios

$$f(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0}{b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0} \quad \text{con } q(t) \neq 0$$

ordenado por la condición $f(t) > 0$ si y solo si $a_n b_m > 0$. Fíjese que $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(t)$ al identificar $a \in \mathbb{R}$ con la fracción $p(t)/q(t)$ donde $p(t) \equiv a$, $q(t) \equiv 1$. Además, $na < t$ para todo $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, porque $t - na > 0$ en $\mathbb{R}(t)$; entonces $\mathbb{R}(t)$ no es arquimediano. La completitud de $\mathbb{R}(t)$ se define por la convergencia de sus sucesiones de Cauchy, discutida más adelante.

La propiedad (e) de la Proposición I.1 es redundante, por la siguiente razón. Cualquier cuerpo \mathbb{F} incluye un subcuerpo mínimo (los números 0 y 1, las sumas $1 + 1 + \cdots + 1$, y los negativos y cocientes de estos elementos). Si hay un entero primo p tal que $0 = 1 + 1 + \cdots + 1$ con p sumandos, este subcuerpo mínimo es isomorfo a $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ y es imposible ordenar \mathbb{F} de acuerdo con la condición (b). Luego, las sumas $1 + 1 + \cdots + 1$ forman una copia de \mathbb{N} dentro de \mathbb{F} y el subcuerpo mínimo es isomorfo a \mathbb{Q} ; en otras palabras, resulta que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$.

Es posible mostrar que las propiedades (a), (b), (c), (d) caracterizan \mathbb{R} : cualquier cuerpo ordenado arquimediano completo es isomorfo a \mathbb{R} . En otras palabras, la Proposición I.1 describe \mathbb{R} de manera suficiente: cualquier conjunto con estas propiedades es una copia isomorfa a \mathbb{R} . Es por eso que las construcciones de Dedekind y Cantor, aunque muy diferentes, conducen al mismo resultado.

► Los *números complejos* \mathbb{C} forman un cuerpo no ordenado: las relaciones $1 \leq i$, $i \leq 1$ son ambas falsas. Sus leyes de suma y multiplicación vienen de las operaciones en \mathbb{R} :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \quad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

De hecho, por asociatividad y distributividad en \mathbb{R} , es necesario que

$$(a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc) + i^2bd,$$

y la sustitución $i^2 = -1$ transforma $ac + i^2bd$ en $ac - bd$. El *recíproco* de $a + ib$ se calcula como sigue:

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

toda vez que $a + ib \neq 0$ – esto es, $(a, b) \neq (0, 0)$ en \mathbb{R}^2 , o bien, $a^2 + b^2 > 0$ en \mathbb{R} .

Cabe recordar que el **valor absoluto** de un número real se define del modo siguiente:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a \leq 0. \end{cases} \quad \text{esto es, } |a| := \sqrt{a^2}.$$

Esta fórmula se extiende a números complejos al definir

$$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, el **conjugado complejo** de z es $\bar{z} := a - ib$. Fíjese que $|\bar{z}| = |z|$; y que $\bar{\bar{z}} = z$ si y solo si $b = 0$, esto es, si y solo si $z \in \mathbb{R}$. En general,

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Con esta terminología, el recíproco de un número complejo se expresa en la forma

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{si } z \neq 0.$$

Los números reales a y b se llaman, respectivamente, la **parte real** y la **parte imaginaria** de z . En símbolos: $\Re z = a$, $\Im z = b$. (Esta terminología es un poco confuso, porque la “parte imaginaria” no es imaginaria, sino real.)

Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ y además $|zw| = |z||w|$, porque

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

Sin embargo, $|z + w|$ no coincide con $|z| + |w|$, en general, sino que la segunda expresión mayoriza la primera.

Lema 1.2. Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces se cumple la **desigualdad triangular**:

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \quad (\text{I.I})$$

Además, vale la **desigualdad triangular inversa**:

$$|z - w| \geq ||z| - |w||. \quad (\text{I.2})$$

Demostración. Para la desigualdad triangular, basta mostrar que $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, porque el valor absoluto siempre es real y no negativo. Ahora bien,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2 \\ (|z| + |w|)^2 &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2, \end{aligned}$$

y entonces basta comprobar que $z\bar{w} + w\bar{z} \leq 2|z||w|$. Esto sigue de

$$z\bar{w} + w\bar{z} = 2\Re(z\bar{w}) \leq 2|\Re(z\bar{w})| \leq 2|z\bar{w}| = 2|z||\bar{w}| = 2|z||w|.$$

Entonces la desigualdad (I.1) está comprobada.

En consecuencia, se obtiene

$$|z + w| - |w| \leq |z| \quad \text{y} \quad |z - w| - |z| \leq |w|$$

Al cambiar $z \mapsto z - w$ en la primera y $w \mapsto z - w$ en la segunda, estas se convierten en

$$|z| - |w| \leq |z - w| \quad \text{y} \quad |w| - |z| \leq |z - w|,$$

de donde la desigualdad triangular inversa es inmediata. \square

Lema 1.3 (Fórmula de de Moivre). *Si θ es un ángulo cualquiera y si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \quad (\text{I.3})$$

Demostración. Los casos $n = 0$ y $n = 1$ son triviales. Para $n = 2$, se obtiene

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 = (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + i(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta,$$

por fórmulas trigonométricas conocidas.

El caso general sigue por inducción sobre n . En efecto,

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{n+1} &= (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= (\cos n\theta \cos \theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} \theta) + i(\cos n\theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} n\theta \cos \theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta), \end{aligned}$$

por las fórmulas conocidas para el coseno y el seno de una suma de ángulos. \square

La fórmula (I.3) dice que la función $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $e(\theta) := \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ tiene una propiedad exponencial: $e(\theta)^n = e(n\theta)$. Más aun, se puede notar que

$$\begin{aligned} e(\theta)e(\phi) &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \\ &= (\cos \theta \cos \phi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi) + i(\cos \theta \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} \theta \cos \phi) \\ &= \cos(\theta + \phi) + i \operatorname{sen}(\theta + \phi) = e(\theta + \phi). \end{aligned}$$

Esto es ciertamente análogo a la fórmula exponencial $e^a e^b = e^{a+b}$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Motivado por esa analogía,⁵ en lugar de $e(\theta)$ se escribe $e^{i\theta} := \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, así que

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)} \text{ en } \mathbb{C}, \quad \text{para todo } \theta, \phi \in \mathbb{R}.$$

Lema 1.4. Si $z \in \mathbb{C}$, vale $|z| = 1$ si y solo si $z = e^{i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\theta \in \mathbb{R}$; se debe comprobar que $|e^{i\theta}| = 1$. En efecto,

$$|e^{i\theta}|^2 = |\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta|^2 = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1,$$

así que $|e^{i\theta}| = \sqrt{1} = 1$.

Ahora bien, si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, entonces $a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$. Fíjese que $-1 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 1$.

Afirmación: hay un único ángulo $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $a = \cos \theta$, $b = \operatorname{sen} \theta$.

En efecto, si $a \neq 0$, se puede tomar $\phi := \operatorname{arctg}(b/a) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, de modo que $b = a \operatorname{tg} \phi$. Por lo tanto, $a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) = 1$, esto es, $a^2 \sec^2 \phi = 1$, así que $a^2 = \cos^2 \phi$.

Fíjese que $\cos \phi > 0$ porque $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Para obtener el ángulo θ , hay varios casos:

- ★ Si $a > 0$, tómese $\theta := \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- ★ Si $a < 0$ y $\phi \leq 0$, tómese $\theta := \phi + \pi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Se ve que $\cos \theta = -\cos \phi = -|a| = a$.
- ★ Si $a < 0$ y $\phi > 0$, tómese $\theta := \phi - \pi \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$. Aquí también $\cos \theta = -\cos \phi = a$.
- ★ Si $a = 0$, entonces $b = \pm 1$. Tómese $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ respectivamente. □

Definición 1.5. El círculo unitario en el conjunto de números complejos

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{a + ib \in \mathbb{C} : a^2 + b^2 = 1\} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in (-\pi, \pi]\}.$$

Bajo la biyección $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 : a + ib \leftrightarrow (a, b)$, este conjunto se identifica con el círculo de radio 1 centrado en el origen de \mathbb{R}^2 ; de ahí su nombre.⁶ ◇

Lema 1.6. Cualquier número complejo puede escribirse en la forma $z = re^{i\theta}$ con $r, \theta \in \mathbb{R}$. Para $z \neq 0$, esta expresión es única si se toma $r > 0$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$.

⁵Hay una mejor justificación para esta notación, al desarrollar $e(\theta)$ en una serie de potencias y al tomar el producto de Cauchy de las series para $e(\theta)$ y $e(\phi)$.

⁶El conjunto \mathbb{T} tiene otros nombres: en topología se llama \mathbb{S}^1 , la esfera de dimensión 1; en la teoría de grupos de Lie se llama $U(1)$, el grupo unitario de rango 1; en análisis complejo se llama $\partial\mathbb{D}$, la frontera del disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. La letra \mathbb{T} viene de la palabra toro: en topología, un toro \mathbb{T}^n es el producto cartesiano de n círculos.

Demostración. Si $z = 0$, tómesese $r = 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ cualquiera. Si $z \neq 0$, tómesese $r := |z|$. Entonces $r > 0$ y $z/r = z/|z|$ tiene valor absoluto 1, así que $z/r = e^{i\theta}$ por el Lema 1.4. En la demostración de esa lema, se vio que es posible tomar $\theta \in (-\pi, \pi]$; y las ecuaciones $\Re z = \cos \theta$, $\Im z = \sin \theta$ determinan el valor de θ en ese intervalo. \square

La función $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ es sobreyectiva pero no es inyectiva. En efecto,

$$re^{i(\theta \pm 2\pi)} = re^{i\theta} = (-r)e^{i(\theta \pm \pi)} \quad \text{para } r, \theta \text{ cualesquiera.}$$

En particular, se debe notar que

$$e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 + i0 = 1 \in \mathbb{C}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. La función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} : \theta \mapsto e^{i\theta}$ es “infinito-a-uno”. Esta función “enrolla la recta alrededor del círculo infinitas veces”.

1.2 Funciones continuas sobre intervalos reales

Antes de estudiar funciones continuas, conviene recordar un poco de terminología sobre funciones en general.

Definición 1.7. Una función f entre dos conjuntos A y B está dada por⁷ una relación $F \subseteq (A \times B)$ tal que:

- ★ para todo $x \in A$, hay un elemento $y \in B$ con $(x, y) \in F$;
- ★ si $(x, y) \in F$, $(x, z) \in F$, entonces $y = z$.

En vista de estas propiedades, se puede escribir $F = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ e identificar la función con la correspondencia $x \mapsto f(x)$ entre A y B . Suele escribirse $\underline{f} : A \rightarrow B$ para denotar esta función; la relación F se llama el **grafo** de f .

El conjunto A es el **dominio** de f y el conjunto B es su **codominio**. La imagen de f es $\underline{\text{im}} f := \{y \in B : (x, y) \in F \text{ para algún } x \in A\}$. \diamond

A veces se permite que el dominio $\underline{\text{dom}} f := \{x \in A : (x, y) \in F \text{ para algún } y \in B\}$ sea una parte propia de A . De este modo, por ejemplo, la receta $f(x) := 1/x$ puede considerarse como función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $x = 0$ excluido del dominio.

⁷Sería más correcta decir que la función es la relación F , aunque la notación $f : A \rightarrow B$ es más práctica. He aquí un aforismo importante: *una función es su grafo*.

Ejemplo 1.8. Si $A \subseteq X$, la función indicatriz de A es $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$, definida por

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

En los casos $A = X$ y $A = \emptyset$, las funciones indicatrices son constantes: $\chi_X \equiv 1$ y $\chi_\emptyset \equiv 0$. \diamond

Definición 1.9. Las funciones indicatrices, con valores en $\{0, 1\}$, son evaluaciones de una *condición booleana*: una relación lógica $R(x)$ que depende de un parámetro x . Se escribe

$$\llbracket R(x) \rrbracket := \begin{cases} 1, & \text{si } R(x) \text{ es CIERTA;} \\ 0, & \text{si } R(x) \text{ es FALSA.} \end{cases}$$

Así, por ejemplo, $\chi_A(x) := \llbracket x \in A \rrbracket$.

Este convenio notacional fue introducido por Kenneth Iverson, el inventor de *APL* (un lenguaje de programación) y ha sido recomendado por Donald Knuth para uso general.⁸

La función f que coincide con $\sin t$ para $t \in [0, \pi]$, y con 0 fuera de ese intervalo, es

$$f(t) := \sin t \llbracket 0 \leq t \leq \pi \rrbracket;$$

La función de signo sobre \mathbb{R} vale 1, 0, -1 para un número positivo, cero o negativo, respectivamente. Su definición es simplemente

$$\text{signo}(t) := \llbracket t > 0 \rrbracket - \llbracket t < 0 \rrbracket.$$

La delta de Kronecker, comúnmente escrito δ_{jk} o δ_j^k , se define así:

$$\delta_{jk} = \llbracket j = k \rrbracket := \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases} \quad \diamond$$

► Dada una función $f: X \rightarrow Y$ y unas partes $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, se define la imagen bajo f de A y la preimagen bajo f de B por:

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{ f(x) : x \in A \} \subseteq Y, \\ f^{-1}(B) &:= \{ x \in X : f(x) \in B \} \subseteq X. \end{aligned}$$

⁸Los documentos originales son los libros: Kenneth E. Iverson, *A Programming Language*, Wiley, New York, 1962; y Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989. Véase también el artículo: Donald E. Knuth, *Two notes on notation*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 403–422.

¶ Si $f: X \rightarrow Y$ es biyectiva, f posee una **función inversa** $g: Y \rightarrow X$ determinada por la receta: $x = g(y) \iff y = f(x)$. Nótese bien que *la notación f^{-1} no se refiere a esta función inversa*. Las funciones inversas de $s = \sin \theta$ y $t = \tan \phi$ son, respectivamente, $\theta = \arcsen s$ y $\phi = \arctg t$. Las notaciones antiguas $\sin^{-1} s$ y $\tan^{-1} t$ no deben usarse, por el riesgo de confundirlas con $\csc s$ y $\cotg t$. ¶

Las correspondencias $A \mapsto f(A)$ y $B \mapsto f^{-1}(B)$ cumplen un juego de igualdades importantes, cuya demostración se deja al lector. Obsérvese que las preimágenes f^{-1} respetan todas las relaciones booleanas, mientras las imágenes directas f no respetan intersecciones.

Lema 1.10. *Dada una función $f: X \rightarrow Y$, las siguientes correspondencias entre partes de X y Y son válidas en general.*

- (a) $f(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$, $f(\bigcap_{j \in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j \in J} f(A_j)$.
- (b) $f^{-1}(\bigcup_{k \in K} B_k) = \bigcup_{k \in K} f^{-1}(B_k)$, $f^{-1}(\bigcap_{k \in K} B_k) = \bigcap_{k \in K} f^{-1}(B_k)$.
- (c) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) \subseteq Y$.
- (d) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.
- (e) Si $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, con igualdad si f es inyectiva.
- (f) Si $B \subseteq Y$, entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, con igualdad si f es sobreyectiva. □

► Si $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se definen los siguientes intervalos:

$$\begin{aligned}
 (a, b) &:= \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}, & (a, \infty) &:= \{t \in \mathbb{R} : a < t\}, \\
 [a, b] &:= \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}, & [a, \infty) &:= \{t \in \mathbb{R} : a \leq t\}, \\
 [a, b) &:= \{t \in \mathbb{R} : a \leq t < b\}, & (-\infty, b) &:= \{t \in \mathbb{R} : t < b\}, \\
 (a, b] &:= \{t \in \mathbb{R} : a < t \leq b\}, & (-\infty, b] &:= \{t \in \mathbb{R} : t \leq b\},
 \end{aligned}$$

y también el intervalo $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Los de la primera columna son “intervalos finitos”, en la segunda columna hay “intervalos semiinfinitos”. Dícese que (a, b) , (a, ∞) , $(-\infty, b)$ y $(-\infty, \infty)$ son **intervalos abiertos**, mientras $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ y $(-\infty, \infty)$ son **intervalos cerrados**; los casos $[a, b)$ y $(a, b]$ se llaman “intervalos semiabiertos”.

Fíjese que la recta total $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ se considera abierta y cerrada a la vez. Si fuera $b < a$, entonces $(a, b) = \emptyset$ y también $[a, b] = \emptyset$; de esta manera, la parte vacía \emptyset puede considerarse como un intervalo trivial, también abierto y cerrado a la vez. Obsérvese también que $[a, a] = \{a\}$, otro intervalo trivial. En adelante, al escribir (a, b) o $[a, b)$ o $(a, b]$ o $[a, b]$, se supondrá que $a < b$, salvo que haya indicación expresa de lo contrario.

Al decir “ I es un intervalo de \mathbb{R} ”, la letra I puede denotar un intervalo de cualquiera de los nueve tipos listados.

► Es hora de considerar *funciones continuas* definidas sobre un intervalo real.

Definición 1.11. Una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo dominio I es un intervalo real se llama *continua en $t_0 \in I$* si, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$t \in I \text{ con } |t - t_0| < \delta \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Dícese que f es *continua en I* si f es continua en t_0 para todo $t_0 \in I$. \diamond

Esta definición expresa, de manera clara y no ambigua, la idea intuitiva de que “ t cerca de t_0 implica $f(t)$ cerca de $f(t_0)$ ”. Primero se establece un *error permisible* $\varepsilon > 0$ para los valores $f(t)$ de la función alrededor de un valor específico $f(t_0)$; en segundo lugar, se busca una *tolerancia* $\delta > 0$ para t en torno a t_0 , que garantice que $f(t)$ esté cerca de $f(t_0)$ dentro del error permitido. Evidentemente, el tamaño de δ depende de ε – por eso se escribe “ $\delta = \delta(\varepsilon)$ ” – y también puede depender tanto del punto t_0 como de la función f .

Nótese que la condición (1.4) puede escribirse como sigue:

$$t \in I \text{ con } t_0 - \delta < t < t_0 + \delta \implies f(t_0) - \varepsilon < f(t) < f(t_0) + \varepsilon.$$

Esta formulación usa el orden tanto en el dominio I como en el codominio \mathbb{R} .

La condición original es también aplicable a funciones con valores complejas: una función $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $t_0 \in I$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ para que (1.4) se cumple. Esta vez, el valor absoluto al lado derecho de la implicación es el de números complejos.

Se puede considerar una función $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ como una combinación (lineal) de dos funciones reales: $f(t) = \Re f(t) + i \Im f(t)$, donde

$$\underline{\Re} f(t) := \Re(f(t)), \quad \underline{\Im} f(t) := \Im(f(t)).$$

Lema 1.12. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo real. Entonces $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en I si y solo si $\Re f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Im f: I \rightarrow \mathbb{R}$ son ambas continuas en I .

Demostración. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces $(\Re z)^2 = a^2 \leq a^2 + b^2$ y $(\Im z)^2 = b^2 \leq a^2 + b^2$. Esto dice que

$$|\Re z| \leq |z|, \quad |\Im z| \leq |z|.$$

Nótese también que $a^2 + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 = (|a| + |b|)^2$, así que $|z| \leq |\Re z| + |\Im z|$.

Supóngase que $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $t_0 \in I$. Dado $\varepsilon > 0$, elíjase $\delta > 0$ para que (1.4) se cumple. Si $t \in I$ con $|t - t_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |\Re f(t) - \Re f(t_0)| &= |\Re(f(t) - f(t_0))| \leq |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon, \\ |\Im f(t) - \Im f(t_0)| &= |\Im(f(t) - f(t_0))| \leq |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego tanto $\Re f$ como $\Im f$ son continuas en t_0 .

Por otro lado, si $\Re f$ y $\Im f$ son continuas en t_0 , y si $\varepsilon > 0$ está dado, tómese $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} t \in I \text{ con } |t - t_0| < \delta_1 &\implies |\Re f(t) - \Re f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ t \in I \text{ con } |t - t_0| < \delta_2 &\implies |\Im f(t) - \Im f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sea $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, para $t \in I$ con $|t - t_0| < \delta$, vale

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |\Re(f(t) - f(t_0))| + |\Im(f(t) - f(t_0))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en t_0 . □

► Es útil expresar la idea de *continuidad* en términos de *preservación de límites*. Cabe recordar la definición de límites de funciones en intervalos reales.

Definición 1.13. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $t_0 \in I$. Si $f: I \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ o bien $f: I \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función (real o compleja), dícese que f posee un límite L en t_0 , escrito

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L, \quad \text{o bien} \quad "f(t) \rightarrow L \text{ cuando } t \rightarrow t_0",$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que el análogo de (1.4) se cumple:

$$t \in I \text{ con } 0 < |t - t_0| < \delta \implies |f(t) - L| < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Si I es un *intervalo abierto*, entonces se puede tomar δ tan pequeño tal que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$, en cuyo caso la frase " $t \in I$ con" es redundante. En cambio, si t_0 es un extremo de un intervalo no cerrado, solo se puede garantizar que $(t_0, t_0 + \delta) \subset I$ o bien $(t_0 - \delta, t_0) \subset I$. En tales casos se habla de **límites unilaterales**:

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow t_0} f(t) = L \quad &\text{si } t_0 < t < t_0 + \delta \implies |f(t) - L| < \varepsilon, \\ \lim_{t \uparrow t_0} f(t) = L \quad &\text{si } t_0 - \delta < t < t_0 \implies |f(t) - L| < \varepsilon. \end{aligned} \quad \diamond$$

Fíjese que en la Definición 1.13 no se ha supuesto que $f(t_0)$ esté definido. Para una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (o bien $f: I \rightarrow \mathbb{C}$) definida en todo el intervalo I , la definición de continuidad puede reformularse como sigue: *f es continua en t_0 si y solo si $f(t) \rightarrow f(t_0)$ cuando $t \rightarrow t_0$.*

Obsérvese que *el límite de f en t_0 , si existe, es único*. En efecto, supóngase que $f(t) \rightarrow K$ y también $f(t) \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow t_0$. Entonces, para $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta = \delta(\varepsilon/2) > 0$ tal que (1.5) valga para ambos límites:

$$t \in I \text{ con } 0 < |t - t_0| < \delta \implies |f(t) - K| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |f(t) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, por la desigualdad triangular (1.1),

$$|K - L| \leq |K - f(t)| + |f(t) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $t \in I$ con $0 < |t - t_0| < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto implica que $|K - L| = 0$, es decir, $K = L$.

► Una función continua también *preserva límites de sucesiones*.

Lema 1.14. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real⁹ que es continua en un punto $s \in I$, sea $\{t_n\}$ una sucesión en I tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(s)$.

Demostración. Sea dado $\varepsilon > 0$. Tómese $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|t - s| < \delta$ implica $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$. En seguida, tómese $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $|t_n - s| < \delta$. Entonces

$$n \geq N \implies |f(t_n) - f(s)| < \varepsilon.$$

Fíjese que N depende de ε , a través de δ . Se ha comprobado que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(s)$. □

► Los límites en \mathbb{R} y el concepto de continuidad respetan las operaciones algebraicas de \mathbb{R} , como muestra la siguiente proposición y su corolario.

Proposición 1.15. Sean $f, g: I \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ salvo posiblemente en el punto $t_0 \in I$. Supóngase que $f(t) \rightarrow L$ y $g(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow t_0$. Entonces:

- (a) $f(t) + g(t) \rightarrow L + M$ cuando $t \rightarrow t_0$;
- (b) $f(t)g(t) \rightarrow LM$ cuando $t \rightarrow t_0$;
- (c) si $M \neq 0$, $f(t)/g(t) \rightarrow L/M$ cuando $t \rightarrow t_0$.

⁹De ahora en adelante, basta enunciar resultados para funciones *reales* solamente; pero *siguen válidos para funciones complejas también*. El lector podrá hacer el ejercicio de comprobar las versiones complejas, sea directamente o mediante las técnicas de la demostración del Lema 1.12.

Demostración. El caso (a) se deja como un ejercicio para el lector.

Ad (b): Obsérvese que

$$f(t)g(t) - LM = (f(t) - L)(g(t) - M) + L(g(t) - M) + M(f(t) - L).$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. Tómesese $\varepsilon_1 > 0$ en función de ε , por una fórmula que se verá más adelante. Entonces hay $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$t \in I \text{ con } 0 < |t - t_0| < \delta_1 \implies |f(t) - L| < \varepsilon_1,$$

$$t \in I \text{ con } 0 < |t - t_0| < \delta_2 \implies |g(t) - M| < \varepsilon_1.$$

Sea $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces para $t \in I$ con $0 < |t - t_0| < \delta$, la desigualdad triangular implica que

$$|f(t)g(t) - LM| \leq \varepsilon_1^2 + L\varepsilon_1 + M\varepsilon_1 = \varepsilon_1(L + M + \varepsilon_1).$$

Elíjase $\varepsilon_1 := \min\{1, \varepsilon/(L + M + 1)\}$. Entonces $\varepsilon_1(L + M + \varepsilon_1) \leq \varepsilon_1(L + M + 1) \leq \varepsilon$, así que $t \in I$ con $0 < |t - t_0| < \delta$ implica $|f(t)g(t) - LM| < \varepsilon$. Se ha comprobado que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)g(t) = LM$.

Ad (c): Sea dado $\varepsilon > 0$. Tómesese $\varepsilon_1 > 0$ en función de ε , por una fórmula que se verá más adelante. Entonces hay $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ tales que

$$t \in I \text{ con } 0 < |t - t_0| < \delta_1 \implies |f(t) - L| < \varepsilon_1,$$

$$t \in I \text{ con } 0 < |t - t_0| < \delta_2 \implies |g(t) - M| < \varepsilon_1,$$

$$t \in I \text{ con } 0 < |t - t_0| < \delta_3 \implies |g(t) - M| < \frac{1}{2}|M|.$$

Nótese que la condición $|g(t) - M| < \frac{1}{2}|M|$ implica, por la desigualdad triangular inversa (1.2), que

$$\frac{1}{2}|M| > |M - g(t)| \geq ||M| - |g(t)|| \geq |M| - |g(t)|,$$

así que $|g(t)| > |M| - \frac{1}{2}|M|$, esto es, $|g(t)| > \frac{1}{2}|M|$.

Sea $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Entonces para $t \in I$ con $0 < |t - t_0| < \delta$, resulta que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t)}{g(t)} - \frac{L}{M} \right| &= \left| \frac{Mf(t) - Lg(t)}{Mg(t)} \right| \leq \frac{|Mf(t) - LM| + |LM - Lg(t)|}{|g(t)||M|} \\ &\leq \frac{|M||f(t) - L| + |L||g(t) - M|}{|M|^2/2} = \frac{2|M|}{|M|^2} |f(t) - L| + \frac{2|L|}{|M|^2} |g(t) - M| \\ &< \frac{2|L| + 2|M|}{|M|^2} \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Elíjase $\varepsilon_1 := \varepsilon|M|^2/2(|L| + |M|)$. Entonces

$$t \in I \text{ con } 0 < |t - t_0| < \delta \implies \left| \frac{f(t)}{g(t)} - \frac{L}{M} \right| < \varepsilon.$$

Se ha comprobado que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)/g(t) = L/M$. □

Corolario 1.16. Sean $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales y sea $t_0 \in I$. Supóngase que f y g son continuas en t_0 y que $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones cf , $f + g$, fg , definidas por

$$\underline{cf}(t) := c f(t), \quad \underline{f + g}(t) := f(t) + g(t), \quad \underline{fg}(t) := f(t) g(t)$$

están definidas en el intervalo I y son continuas en t_0 .

Además, si $g(t_0) \neq 0$, hay un subintervalo $J \subseteq I$ con $t_0 \in J$ tal que $\underline{f/g}(t) := f(t)/g(t)$ está definida para $t \in J$; y la función f/g es continua en t_0 .

Demostración. Basta tomar $L = f(t_0)$ y $M = g(t_0)$ y aplicar la Proposición 1.15. \square

Definición 1.17. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo real. Denótese por:

$$C(I, \mathbb{R}) := \{ f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \}, \quad C(I, \mathbb{C}) := \{ g: I \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua} \},$$

la totalidad de las funciones continuas sobre I con valores en \mathbb{R} y en \mathbb{C} , respectivamente. Por el Corolario 1.16, $C(I, \mathbb{R})$ es un *espacio vectorial* sobre \mathbb{R} mientras $C(I, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} .

De hecho, $C(I, \mathbb{R})$ es un *álgebra* (conmutativa)¹⁰ sobre \mathbb{R} : es un espacio \mathbb{R} -vectorial que admite una multiplicación asociativa (y conmutativa) que cumple la ley distributiva: $(f + g)h = fh + gh$ para todo $f, g, h \in C(I, \mathbb{R})$. De igual manera, $C(I, \mathbb{C})$ es un *álgebra* (conmutativa) sobre \mathbb{C} . \diamond

Ejemplo 1.18. Una *función constante*, $f(t) \equiv c$ para todo $t \in I$, es obviamente continua en I : dado cualquier $t_0 \in I$ y cualquier $\varepsilon > 0$, se puede tomar $\delta > 0$ arbitrario para hacer cumplir (1.4).

La *función identidad* es también continua en I : en este caso, basta tomar $\delta(\varepsilon) := \varepsilon$.

El Corolario 1.16 ahora implica que cualquier **polinomio**:

$$p(t) := a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

es continua en todo \mathbb{R} . Si los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n son reales, entonces $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; si son complejos, entonces $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. \diamond

► Una propiedad esencial que distingue las funciones continuas es la llamada **propiedad del valor intermedio**, enunciado originalmente por Bernhard Bolzano en 1817.

Teorema 1.19 (Bolzano). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < f(b)$. Si $v \in \mathbb{R}$ cumple $f(a) < v < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = v$.

¹⁰Si \mathbb{F} es un cuerpo cualquiera, una \mathbb{F} -álgebra es un *espacio \mathbb{F} -vectorial* A que a su vez es una *anillo* (no necesariamente conmutativo) con reglas de compatibilidad entre suma, producto y multiplicación escalar: $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$, $(cx)y = x(cy) = c(xy)$ para $x, y, z \in A$, $c \in \mathbb{F}$.

Demostración. Considérese el conjunto $V := \{t \in [a, b] : f(t) < v\}$. Nótese que $V \neq \emptyset$ porque $a \in V$. Por otro lado, V es acotado superiormente (por b , en primer lugar). Sea $v := \sup V$ su cota superior mínima (usando la completitud de \mathbb{R}). Está claro que $a \leq c \leq b$.

Si fuera $c = b$, entonces para cada $n > 1/(b - a)$ existiría t_n con $b - \frac{1}{n} < t_n < b$ tal que $f(t_n) < v$. Como $0 < b - t_n < 1/n$ para todo n , se ve que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$. Por la continuidad de f en b y el Lema 1.14, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(b) > v$; pero a su vez $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \leq v$ ya que cada $f(t_n) < v$. Esta contradicción muestra que $c \neq b$.

Si fuera $c = a$, entonces para cada $m > 1/(b - a)$ existiría t'_m con $a < t'_m < a + \frac{1}{m}$ tal que $t'_m \notin V$, esto es, $f(t'_m) \geq v$. Entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} t'_m = a$; y por la continuidad de f en a , seguiría $\lim_{m \rightarrow \infty} f(t'_m) = f(a) < v$, incompatible con $\lim_{m \rightarrow \infty} f(t'_m) \geq v$. Esta segunda contradicción muestra que $c \neq a$.

Por ende, vale $a < c < b$. Ahora se puede repetir los argumentos anteriores – esta vez, de modo no condicional – para obtener dos sucesiones $\{t_n\}$ y $\{t'_m\}$ tales que

$$c - \frac{1}{n} < t_n < c < t'_m < c + \frac{1}{m} \quad \text{cuando} \quad n > \frac{1}{c - a}, \quad m > \frac{1}{b - c},$$

donde cada $f(t_n) < v$ y cada $f(t'_m) \geq v$. Está claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = c$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} t'_m = c$. Por la continuidad de f en c , se obtiene del Lema 1.14:

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \leq v \quad \text{y} \quad f(c) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(t'_m) \geq v.$$

Entonces, necesariamente, vale $f(c) = v$. □

En el teorema anterior, no hay pérdida de generalidad en asumir que $f(a) < f(b)$. De hecho, si $f(a) = f(b)$, no hay nada que mostrar; y si $f(a) > f(b)$, sea $g(t) := -f(t)$ para $t \in [a, b]$. Entonces $g(a) < g(b)$ y además g es continua en $[a, b]$ por el Corolario 1.16. Luego hay $c \in (a, b)$ con $g(a) < g(c) = -v < g(b)$ y por ende $f(c) = v$.

Corolario 1.20. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, no constante, definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Entonces la imagen $f(I)$ es también un intervalo en \mathbb{R} .

Demostración. Sean $u, w \in f(I)$ con $u < w$. Entonces hay $a, b \in I$ con $f(a) = u$ y $f(b) = w$. Sin perder generalidad, supóngase que $a < b$; porque si $a > b$, se puede reemplazar f por $-f$. Ahora, si $v \in (u, w)$, el Teorema 1.19 muestra que existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = v$, así que $v \in f(I)$.

Se ha comprobado que $u, w \in f(I) \implies [u, w] \subseteq f(I)$. Esto muestra que $f(I)$ debe ser un intervalo de \mathbb{R} . □

► En la Definición 1.11 de la continuidad de una función en un punto $t_0 \in I$, se notó que la tolerancia $\delta > 0$ puede depender de la función f , del error permisible ε , y del punto t_0 . En muchas ocasiones, es posible escoger δ independiente de t_0 , es decir, dados f y ε se puede tomar el mismo δ para todo $t_0 \in I$. Esto es el contenido de la definición siguiente.

Definición 1.21. Una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo dominio I es un intervalo real se llama *uniformemente continua en I* si, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$s, t \in I \text{ con } |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon. \quad \diamond$$

Ejemplo 1.22. Defínase la función $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) := 1/t$.

Si $t, t_0 \in (0, 1]$, entonces

$$|f(t) - f(t_0)| = \frac{|t_0 - t|}{tt_0} = \frac{|t - t_0|}{tt_0}.$$

Para garantizar que $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ cuando $|t - t_0| < \delta$, es necesario tomar δ tal que $0 < \delta < tt_0\varepsilon$. Como $t \leq 1$, se requiere al menos que $0 < \delta < t_0\varepsilon$, lo cual es imposible si $t_0 \in (0, 1]$ es arbitrario.

Se concluye que la función $f(t) := 1/t$ es continua en $(0, 1]$, pero no es *uniformemente* continua en ese intervalo. \diamond

1.3 Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy

En este curso se asume que el lector conoce la teoría básica de sucesiones y series de números reales, el concepto de convergencia de una sucesión o serie y los criterios clásicos para la convergencia de series. Los párrafos que siguen ofrecen un rápido recordatorio de tales conceptos.

Definición 1.23. Una *sucesión* en \mathbb{R} es una función $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, denotado usualmente por $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ o simplemente $\{a_n\}$, donde $a_n = a(n)$ para todo n .¹¹ En vez de \mathbb{N} se puede usar cualquier otro conjunto índice numerable: la sucesión $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ está indiciada por \mathbb{N}^* .

La sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ **converge al límite** $\ell \in \mathbb{R}$ si para $\varepsilon > 0$ dado, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies |a_n - \ell| < \varepsilon$. Se escribe “ $a_n \rightarrow \ell$ cuando $n \rightarrow \infty$ ” y $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. \diamond

Una sucesión convergente es acotada. En efecto, hay un intervalo acotado $[c, d]$ que incluye el intervalo $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ y el juego finito de entradas $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$.

► La sucesión real $\{a_n\}$ es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n . (Suele decirse que $\{a_n\}$ es **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para todo n .)

¹¹ Algunos autores escriben (a_n) en vez de $\{a_n\}$ para enfatizar que en la *lista* de sus entradas, los a_n no tienen que ser distintos; en contraste con el *conjunto* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, en el cual se eliminan las repeticiones.

Lema 1.24. *Una sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión creciente en \mathbb{R} tal que $a_n \leq b$ para todo n . Sea $\ell := \sup a_n$ el **supremo**, o *cota superior mínima*, del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Por su definición, $\ell \leq b$.)

Dado $\varepsilon > 0$, el número $\ell - \varepsilon$ no es una cota superior, así que hay $N \in \mathbb{N}$ con $a_N > \ell - \varepsilon$. Para todo $n \geq N$, resulta entonces que

$$\ell - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon,$$

así que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ cuando $n \geq N$. □

De igual manera, una sucesión **decreciente** $\{b_n\}$, es decir, $b_n \geq b_{n+1}$ para todo n , si es acotada inferiormente por c (es decir, $b_n \geq c$ para todo n), es también convergente. En el caso decreciente, el límite coincide con el **ínfimo**, o *cota inferior máxima*, $m := \inf b_n$, del conjunto $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$; nótese que $m \leq c$.

¶ Si una parte $A \subset \mathbb{R}$ es acotada inferiormente por $c \in \mathbb{R}$, entonces $-A := \{-t : t \in A\}$ es acotada superiormente por $-c$. La completitud de \mathbb{R} implica que $-A$ posee una cota superior mínima $-s \in \mathbb{R}$; entonces s es una cota inferior máxima para A . ¶

► Una **subsucesión** de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $b_k = a_{n_k}$ para una selección creciente de índices de la sucesión original, $n_0 < n_1 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$; a veces se escribe $\{a_{n_k}\}$ para denotar esta subsucesión de $\{a_n\}$.

Debe estar claro que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell$ también.

Una sucesión acotada que no es *monotónica* (es decir, creciente o decreciente) en general no sería convergente. Por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ *oscila* entre dos valores -1 y 1 sin converger. Desde luego, es obvio que tiene (al menos) dos subsucesiones convergentes: las entradas pares forman la sucesión constante de valor 1 , las entradas impares forman la sucesión constante de valor -1 .

Teorema 1.25 (Bolzano y Weierstrass). *Una sucesión acotada en \mathbb{R} posee una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en \mathbb{R} : entonces existen cotas $c_0, d_0 \in \mathbb{R}$ tales que $c_0 \leq a_n \leq d_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dicho de otra manera, hay un intervalo finito cerrado $[c_0, d_0]$ que incluye el conjunto de las entradas $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si este conjunto A es finito, al menos una entrada a_m está repetida infinitas veces en la sucesión; en tal caso, la sucesión dada tiene una sucesión constante.

Se puede suponer, entonces, que A es infinito y que $c < d$. Escribáse $a_{0,n} = a_n$. Ahora bien, $[c_0, d_0] = [c_0, \frac{1}{2}(c_0 + d_0)] \cup [\frac{1}{2}(c_0 + d_0), d_0]$; y al menos una de estas dos subintervalos contiene infinitos elementos de A ; llámese $[c_1, d_1]$ a ese subintervalo (no importa cual de los

dos se elige como $[c_1, d_1]$ si ambos tienen infinitos elementos de A .) Al omitir las entradas de $\{a_{0,n}\}$ que no pertenecen a $[c_1, d_1]$, se obtiene una subsucesión $\{a_{1,n}\}$ de $\{a_{0,n}\}$ tal que $c_1 \leq a_{1,n} \leq d_1$ para todo n .

Ahora sea $[c_2, d_2]$ una de los dos intervalos $[c_1, \frac{1}{2}(c_1 + d_1)]$ o $[\frac{1}{2}(c_1 + d_1), d_1]$ que contiene infinitos elementos de A . Hay una subsucesión $\{a_{2,n}\}$ de $\{a_{1,n}\}$ – la cual es automáticamente una subsucesión de $\{a_{0,n}\}$ también – tal que $c_2 \leq a_{2,n} \leq d_2$ para todo n .

Continuando este proceso por inducción, después de k pasos se obtiene subintervalos $[c_k, d_k] \subset [c_{k-1}, d_{k-1}] \subset \cdots \subset [c_0, d_0]$ y subsucesiones $\{a_{k,n}\}$ de $\{a_{0,n}\}$ con $c_k \leq a_{k,n} \leq d_k$ para todo n . Además, estas bisecciones conllevan la igualdad $d_k - c_k = (d_0 - c_0)/2^k$.

Considérese ahora la *subsucesión diagonal* $\{a_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{a_{0,n}\}$. Fíjese que $c_k \leq a_{k,k} \leq d_k$ para todo k .

Los extremos de los intervalos forman dos sucesiones, $\{c_k\}$ creciente y $\{d_m\}$ decreciente, tales que $c_k \leq d_m$ para todo $k, m \in \mathbb{N}$. Si $c := \sup_k c_k$ y $d := \inf_m d_m$, el Lema 1.24 muestra que $c_k \uparrow c$ y $d_m \downarrow d$, mientras $c \leq d_m$ y $c_k \leq d$ para todo k, m ; entonces $c \leq d$. Además, al ser $c_k \leq c \leq d \leq d_k$ para cada k , se obtiene

$$d - c \leq d_k - c_k = \frac{d_0 - c_0}{2^k} \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N},$$

así que $d - c = 0$, o sea, $c = d$.

Sea dado $\varepsilon > 0$. Tómese $N \in \mathbb{N}$ con $(d_0 - c_0)/2^N < \varepsilon$. Entonces, si $k \geq N$, tanto $a_{k,k}$ como c están en el intervalo $[c_k, d_k]$, así que $|a_{k,k} - c| \leq d_k - c_k < \varepsilon$. Por lo tanto, $a_{k,k} \rightarrow c$ cuando $k \rightarrow \infty$. \square

Corolario 1.26. Una sucesión acotada en un intervalo finito cerrado $[c_0, d_0] \subset \mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente en ese intervalo.

Demostración. En la demostración anterior, se obtuvo $c_0 \leq c_k \leq c \leq d_k \leq d_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,k} = c \in [c_0, d_0]$. \square

El teorema de Bolzano y Weierstrass es aplicable para demostrar que en un *intervalo finito y cerrado*, una función continua alcanza un valor máximo y un valor mínimo.

Teorema 1.27. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde $a < b$ en \mathbb{R} . Entonces la imagen $f([a, b])$ es un intervalo acotado y cerrado. Si se define

$$m := \inf\{f(t) : t \in [a, b]\}, \quad M := \sup\{f(t) : t \in [a, b]\},$$

entonces existen $t_1, t_2 \in [a, b]$ tales que $f(t_1) = m$, $f(t_2) = M$.

Demostración. Del Corolario 1.20, se sabe que la imagen $f([a, b])$ es un intervalo real: *a priori*, podría ser acotado o no y podría ser cerrado o no.

Si esta imagen no fuera acotado superiormente, habría una sucesión de puntos $\{t_n\} \subset [a, b]$ tal que $f(t_n) > n$ para todo n . Entonces existiría una subsucesión $\{t_{n_k}\}$ convergente a un límite $c \in [a, b]$. Por el Lema 1.14, sería $f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n_k})$; pero esto es incompatible con la condición $f(t_{n_k}) > n_k$ para todo k .

Se concluye que $f([a, b])$ es acotado superiormente, es decir, que $M < \infty$. De igual manera, se deduce que $f([a, b])$ es acotado inferiormente, es decir, que $m > -\infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $M - \frac{1}{n}$ no es una cota superior para $f([a, b])$, así que hay puntos $s_n \in [a, b]$ tales que $M - \frac{1}{n} \leq f(s_n) \leq M$. Por el Corolario 1.26 de nuevo, hay una subsucesión $\{s_{n_k}\}$ convergente a un límite $t_2 \in [a, b]$. Por el Lema 1.14 de nuevo, vale $f(t_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(s_{n_k}) = M$.

De igual manera, se obtiene t_1 tal que $f(t_1) = m$. En resumen, $f([a, b]) = [m, M]$ es un intervalo acotado y cerrado. \square

► Obsérvese que en la demostración del teorema de Bolzano y Weierstrass, hubo que emplear explícitamente *la completitud de los números reales*, al apelar al Lema 1.24 para obtener los números $c, d \in \mathbb{R}$ (que luego resultan ser iguales). Este teorema no es válido para sucesiones en \mathbb{Q} : por ejemplo, la sucesión acotada $\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\}$ – las aproximaciones decimales inferiores para $\sqrt{2}$ – no tiene subsucesión alguna que converga a un límite en \mathbb{Q} .

Cauchy enunció un criterio de convergencia para sucesiones que no requiere el conocimiento del límite de antemano. Al igual que el teorema de Bolzano y Weierstrass, requiere la completitud de \mathbb{R} para obtener la existencia del límite. Varias décadas después, Cantor basó su construcción axiomática de \mathbb{R} en una familia de esas sucesiones.

Definición 1.28. Una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} es una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con la siguiente propiedad: dado $\varepsilon > 0$, existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq M \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$. \diamond

Proposición 1.29. Una sucesión en \mathbb{R} es convergente si y solo si es de Cauchy.

Demostración. Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, con $a_n \rightarrow \ell$, sea dado $\varepsilon > 0$. Entonces, para $m, n \geq N(\varepsilon/2)$, se obtiene

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - \ell| + |\ell - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, al tomar $M(\varepsilon) = N(\varepsilon/2)$, una sucesión convergente es necesariamente de Cauchy.

Inversamente, sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} . Sea dado $\varepsilon > 0$. Entonces existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq M \implies |a_m - a_n| < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Si $m \geq M$, en particular, $|a_m| \leq |a_M| + |a_m - a_M| < |a_M| + \varepsilon$. Si

$$b := \max\{|a_0|, \dots, |a_{M-1}|, |a_M| + \varepsilon\},$$

entonces $|a_m| \leq b$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, *una sucesión de Cauchy es acotada*.

El Teorema 1.25 (de Bolzano y Weierstrass) implica que $\{a_n\}$ posee una subsucesión convergente $\{a_{n_k}\}$. Sea $\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$; existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K \implies |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2$.

Sin perder generalidad, se puede suponer que $K \geq M(\varepsilon/2)$. Entonces $n \geq K$ implica que $|a_n - a_{n_K}| < \varepsilon/2$. De la desigualdad triangular se deduce que

$$n \geq K \implies |a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_K}| + |a_{n_K} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión original también converge a ℓ . \square

La segunda parte de la proposición anterior (que cada sucesión de Cauchy es convergente) depende de la completitud de \mathbb{R} . En cambio, si se considera sucesiones de Cauchy en \mathbb{Q} , *la afirmación análoga es falsa*: hay sucesiones de Cauchy que no convergen a un límite en \mathbb{Q} . De hecho, como se anticipó al inicio de la sección 1.1, es posible definir el conjunto de números reales “al agregar los límites que faltan” a las sucesiones de Cauchy racionales.

Definición 1.30. Denótese por \mathcal{C} la familia de todas las sucesiones de Cauchy *con entradas racionales*. Defínase una relación de equivalencia en \mathcal{C} por $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\underline{\mathbb{R}} := \mathcal{C}/\sim$ el conjunto cociente; escribáse $\underline{a} := [\{a_n\}]$, $\underline{b} := [\{b_n\}]$ para las clases de equivalencia respectivas de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en \mathcal{C} .

Al definir $\underline{a} + \underline{b} := [\{a_n + b_n\}]$ y $q\underline{a} := [\{qa_n\}]$, se ve que \mathcal{C} es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} . Si \mathcal{N} denota el subespacio de las *sucesiones nulas* $\{a_n\}$ tales que $a_n \rightarrow 0$, fíjese que $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si y solo si $\{a_n\} - \{b_n\} \in \mathcal{N}$. Luego $\underline{\mathbb{R}} = \mathcal{C}/\mathcal{N}$ es un espacio \mathbb{Q} -vectorial cociente. Con la multiplicación definida por $\underline{a}\underline{b} := [\{a_nb_n\}]$, $\underline{\mathbb{R}}$ es un cuerpo. Al identificar $q \in \mathbb{Q}$ con la clase de la sucesión constante $\underline{q} = [\{q, q, q, \dots\}]$, se ve que $\mathbb{Q} \subset \underline{\mathbb{R}}$.

Este cuerpo es ordenado: se declara que $\underline{a} \leq \underline{b}$ si es posible escoger las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $a_n \leq b_n$ para todo n . \diamond

Es un ejercicio demostrar que el cuerpo ordenado $\underline{\mathbb{R}}$ es arquimediano. Para poder identificar $\underline{\mathbb{R}}$ con \mathbb{R} y así terminar la construcción de Cantor, hace falta comprobar que cada sucesión de Cauchy en $\underline{\mathbb{R}}$ es convergente. Para ese efecto, hace falta *definir* las sucesiones de Cauchy en $\underline{\mathbb{R}}$ con una pequeña modificación de la condición (1.6): se debe reemplazar el valor absoluto $|a - b|$ por la cantidad

$$\rho^\#(\underline{a}, \underline{b}) := \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Este límite existe (en el cuerpo \mathbb{R} ya definido) porque

$$|a_m - b_m| \leq |a_m - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - b_m|,$$

para cada $m, n \in \mathbb{N}$, así que

$$||a_m - b_m| - |a_n - b_n|| \leq |a_m - a_n| + |b_n - b_m|.$$

Como $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de Cauchy en \mathbb{Q} , la última desigualdad muestra que $\{|a_n - b_n|\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} (ya que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) y es convergente en \mathbb{R} por la Proposición 1.29. Se deja como un ejercicio verificar que $\rho^\#(\underline{a}, \underline{b})$ está bien definido: si $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ y $\{b_n\} \sim \{d_n\}$ en \mathcal{C} , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - d_n|$.

Lema 1.31. Si $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \underline{\mathbb{R}}$, entonces $\rho^\#(\underline{a}, \underline{c}) \leq \rho^\#(\underline{a}, \underline{b}) + \rho^\#(\underline{b}, \underline{c})$.

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|.$$

El resultado sigue al tomar límites cuando $n \rightarrow \infty$. (Nótese que los tres límites existen.) \square

Ahora se dice que una sucesión $\{\underline{a}^{(n)}\}$ es *de Cauchy en $\underline{\mathbb{R}}$* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq M \implies \rho^\#(\underline{a}^{(m)}, \underline{a}^{(n)}) < \varepsilon.$$

Para $p, q \in \mathbb{Q}$, las sucesiones constantes \underline{p} y \underline{q} obedecen $\rho^\#(\underline{p}, \underline{q}) = |p - q|$, así que esta definición de sucesiones de Cauchy es consistente con la inclusión $\mathbb{Q} \subset \underline{\mathbb{R}}$.

De igual manera, se dice que una sucesión $\{\underline{a}^{(n)}\}$ es *convergente a $\underline{\ell} \in \underline{\mathbb{R}}$* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies \rho^\#(\underline{a}^{(n)}, \underline{\ell}) < \varepsilon$.

Proposición 1.32. Cada sucesión de Cauchy en $\underline{\mathbb{R}}$ es convergente en $\underline{\mathbb{R}}$.

Demostración. En primer lugar, si $\underline{a} = [\{a_n\}] \in \underline{\mathbb{R}}$ y si $n \in \mathbb{N}^*$, hay $M_n \in \mathbb{N}$ tal que $k, m \geq M_n \implies |a_k - a_m| < 1/n$. Para $q := a_{M_n} \in \mathbb{Q}$, esto dice que $|a_k - q| < 1/n$ toda vez que $k \geq M_n$. Entonces para la sucesión constante $\{q\}$ se verifica

$$\rho^\#(\underline{a}, \underline{q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - q| \leq \frac{1}{n}.$$

Ahora sea $\{\underline{a}^{(n)}\}$ una sucesión de Cauchy en $\underline{\mathbb{R}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\rho^\#(\underline{a}^{(n)}, \underline{q}_n) \leq 1/n$, en virtud del párrafo anterior.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, m \geq M \implies \rho^\#(\underline{a}^{(k)}, \underline{a}^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tómese $N \geq \max\{M, 4/\varepsilon\}$. Entonces para $k, m \geq N$, el Lema 1.31 muestra que

$$\begin{aligned} |q_k - q_m| &= \rho^\#(\underline{q}_k, \underline{q}_m) \leq \rho^\#(\underline{q}_k, \underline{a}^{(k)}) + \rho^\#(\underline{a}^{(k)}, \underline{a}^{(m)}) + \rho^\#(\underline{a}^{(m)}, \underline{q}_m) \\ &< \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que la sucesión $\{q_n\}$ es de Cauchy en \mathbb{Q} , así que $\underline{\ell} := [\{q_n\}] \in \underline{\mathbb{R}}$.

Además, para $m \geq N$, se verifica

$$\rho^\#(\underline{a}^{(m)}, \underline{\ell}) \leq \rho^\#(\underline{a}^{(m)}, \underline{q}_m) + \rho^\#(\underline{q}_m, \underline{\ell}) \leq \frac{1}{m} + \lim_{n \rightarrow \infty} |q_m - q_n| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\{\underline{a}^{(m)}\}$ converge a $\underline{\ell}$ en $\underline{\mathbb{R}}$. \square

La última demostración incorpora una versión disfrazada del “argumento diagonal” que se observó en la prueba del teorema de Bolzano y Weierstrass. Es posible identificar los límites en \mathbb{R} de sucesiones de Cauchy en \mathbb{Q} , de la forma $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$, con los elementos $\underline{\ell} \in \underline{\mathbb{R}}$ contruidos arriba. En otras palabras, hay una función inyectiva $\ell \mapsto \underline{\ell}$ de \mathbb{R} en $\underline{\mathbb{R}}$ y no es difícil comprobar que esta función es biyectiva. De esta manera, se puede identificar $\underline{\mathbb{R}}$ con \mathbb{R} y dar por concluida la construcción de Cantor.

Más adelante, se verá que esta construcción admite una generalización importante: la *compleción* de un espacio métrico.

1.4 Convergencia uniforme de funciones

Luego de haber estudiado sucesiones numéricas $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, se puede considerar sucesiones de funciones $\{f_n\}$ definidas en un dominio común. Sería excelente si el límite de una sucesión convergente de funciones continuas fuera también continua, pero en general esto no ocurre. Con ese objetivo, se debe refinar la noción de convergencia de funciones.

Definición 1.33. Una sucesión de funciones $\{f_n: I \rightarrow \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, definidas en un intervalo común $I \subset \mathbb{R}$, **converge puntualmente** a una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si $f_n(t) \rightarrow f(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$, para cada $t \in I$.

En detalle: para cada $\varepsilon > 0$ dado y cada $t \in I$, existe $N = N(t, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N(t, \varepsilon) \implies |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon. \quad \diamond$$

Ejemplo 1.34. Considérese la familia de funciones $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(t) := t^n$, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $t^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ so $0 \leq t < 1$, pero $1^n \rightarrow 1$ (de hecho, $\{1^n\}$ es una sucesión constante). Entonces $f_n \rightarrow f$ puntualmente, donde la función límite es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

esto es, $f(t) = \llbracket t = 1 \rrbracket$ para $t \in [0, 1]$.

Fíjese que cada f_n es continua en $[0, 1]$, pero f es discontinua en $t = 1$. \diamond

Definición 1.35. Una sucesión de funciones $\{f_n: I \rightarrow \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, definidas en un intervalo común $I \subset \mathbb{R}$, **converge uniformemente** a una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N(\varepsilon) \implies |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo } t \in I. \quad (1.8)$$

Nótese que en este caso N depende de ε pero no de $t \in I$. \diamond

En contraste con lo que ocurre en el Ejemplo 1.34, el *límite uniforme* de funciones continuas es una función continua. Esto sigue por un “argumento de $\varepsilon/3$ ”.

Proposición 1.36. Sea $\{f_n: I \rightarrow \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces la función límite f es también continua en I .

Demostración. Sea dado $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N = N(\varepsilon/3) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } t \in I.$$

Tómese $t_0 \in I$. Como f_N es continua en t_0 , por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in I \text{ con } |t - t_0| < \delta \implies |f_N(t) - f_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, para $t \in I$ con $|t - t_0| < \delta$, la desigualdad triangular implica que

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Como $t_0 \in I$ es arbitrario, esto dice que f es continua en I . \square

Notación. Conviene introducir una abreviatura para simplificar algunas expresiones en torno al tema de la convergencia uniforme. Dada una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, escríbase

$$\|f\|_I := \sup\{|f(t)| : t \in I\}.$$

\llbracket Si $c: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función constante, $c(t) \equiv c$ para $t \in I$, entonces $\|c\|_I = |c|$. \rrbracket

Entonces la condición (1.8) puede abreviarse así:¹² $n \geq N(\varepsilon) \implies \|f_n - f\|_I < \varepsilon$.

Fíjese que $\|\cdot\|_I$ cumple la desigualdad triangular:

$$\|f + g\|_I = \sup_{t \in I} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in I} (|f(t)| + |g(t)|) \leq \sup_{s, t \in I} (|f(s)| + |g(t)|) = \|f\|_I + \|g\|_I.$$

¹²En general, al tomar supremos al lado derecho de (1.8), solo es posible concluir que $\|f_n - f\|_I \leq \varepsilon$. Para superar ese obstáculo, tómese $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ y sea $\tilde{N}(\varepsilon) := N(\tilde{\varepsilon})$; entonces $n \geq \tilde{N}(\varepsilon) \implies \|f_n - f\|_I \leq \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$.

► La Proposición 1.36 es particularmente útil cuando se aplica a *series* de funciones. Recuerdese que una serie no es otra cosa que una sucesión de sumas parciales. En particular, una serie de funciones, con sumas parciales

$$s_n(t) := f_0(t) + f_1(t) + \cdots + f_n(t), \quad \text{para cada } t \in I,$$

converge puntualmente a una suma $s: I \rightarrow \mathbb{R}$ si $s_n(t) \rightarrow s(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $t \in I$. La serie converge uniformemente en I si $s_n(t) \rightarrow s(t)$ uniformemente.

En particular, la Proposición 1.36 dice que si una serie de funciones continuas converge uniformemente en I , entonces la suma es una función continua en I . Hay un criterio sencillo, debido a Weierstrass, para obtener (en muchos casos) esa convergencia uniforme.

Proposición 1.37 (Criterio- M de Weierstrass). Sea $f_k: I \rightarrow \mathbb{R}$, para $k \in \mathbb{N}$, un juego de funciones acotadas sobre I , con $|f_k(t)| \leq M_k$ para todo $t \in I$. Si la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ es uniformemente convergente en I .

Demostración. En primer lugar, es necesario mostrar que la serie de funciones converge puntualmente. Por la Proposición 1.29, basta comprobar que la sumas parciales $s_n(t)$ forman una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} , para cada $t \in I$.

Las sumas parciales de la serie convergente $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ forman una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} . Sea dado $\varepsilon > 0$; entonces existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$n \geq N(\varepsilon), r \in \mathbb{N} \implies M_{n+1} + \cdots + M_{n+r} < \varepsilon.$$

Sea $t \in I$. Entonces, para $n \geq N$ y $r \in \mathbb{N}$, vale

$$|f_{n+1}(t) + \cdots + f_{n+r}(t)| \leq |f_{n+1}(t)| + \cdots + |f_{n+r}(t)| \leq M_{n+1} + \cdots + M_{n+r} < \varepsilon. \quad (1.9)$$

Entonces las sumas parciales $\{s_n(t)\}$ forman una sucesión de Cauchy y por lo tanto poseen un límite en \mathbb{R} :

$$s(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t).$$

Fíjese que $f_{n+1}(t) + \cdots + f_{n+r}(t) = s_{n+r}(t) - s_n(t)$ y que esta cantidad tiende a $s(t) - s_n(t)$ cuando $r \rightarrow \infty$. Al dejar $r \rightarrow \infty$ en la desigualdad (1.9), se obtiene

$$n \geq N(\varepsilon) \implies |s(t) - s_n(t)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Por su construcción, $N(\varepsilon)$ es independiente de t : por lo tanto, $s_n(t) \rightarrow s(t)$ uniformemente sobre I . \square

Ejemplo 1.38. Considérese una serie de potencias:

$$h(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t - t_0)^k$$

determinado por una sucesión de coeficientes $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y un “centro” $t_0 \in \mathbb{R}$. Es obvio que la serie converge cuando $t = t_0$ y su suma es $s(t_0) = a_0$, trivialmente.

Supóngase que la serie converge *absolutamente* cuando $t = t_0 + r$ para algún $r > 0$. El criterio- M muestra que la serie converge absoluta y uniformemente en el intervalo cerrado $[t_0 - r, t_0 + r]$, porque

$$|a_k(t - t_0)^k| = |a_k| |t - t_0|^k \leq |a_k| r^k \quad \text{para } k \in \mathbb{N}, |t - t_0| \leq r,$$

y la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ converge, por hipótesis.

Si $R := \sup\{r \geq 0 : h(t_0 + r) \text{ converge absolutamente}\}$, entonces la serie $h(t)$ converge en el intervalo abierto $(t_0 - R, t_0 + R)$ y diverge para $|t - t_0| \geq R$. En los extremos $t_0 \pm R$, la convergencia de la serie depende de la naturaleza de los coeficientes a_k y debe ser estudiado caso por caso. Nótese que los valores $R = 0$ y $R = +\infty$ son admisibles. En todo caso, la convergencia es uniforme en cualquier subintervalo cerrado $[t_0 - r, t_0 + r] \subset (t_0 - R, t_0 + R)$, pero no necesariamente uniforme en todo el intervalo abierto. \diamond

¶ Este R se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Usando el criterio de la raíz para series numéricas, se puede comprobar que $1/R = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$. ¶

► Uno de los usos más frecuentes de la convergencia es *el intercambio de límites o sumas con integrales*. Conviene recordar la definición de la integral de Riemann¹³ de una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 1.39. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función acotada, definido sobre un intervalo finito cerrado. Sea \mathcal{P} una **partición** del intervalo $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad \text{con} \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

En cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, hay cotas finitas

$$m_i(f) := \inf\{f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}, \quad M_i(f) := \sup\{f(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}.$$

¹³La integral de Riemann compite con la llamada integral de Lebesgue, que tiene mejores propiedades de intercambio con límites (no requiere convergencia uniforme de los integrandos). El estudio de la integral de Lebesgue será abordado en el curso siguiente. Por ahora, basta notar que para un función continua cuyo dominio es un intervalo acotado, las dos integrales coinciden.

Las sumas de Riemann inferior y superior de f con respecto a la partición \mathcal{P} son, respectivamente:

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n m_i(f) (t_i - t_{i-1}), \quad \bar{S}(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n M_i(f) (t_i - t_{i-1}).$$

Otra partición \mathcal{Q} refina \mathcal{P} si $\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}$, es decir, si cada punto de \mathcal{P} es también un punto de \mathcal{Q} . Es fácil chequear que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P}).$$

Dícese que f es *integrable en el sentido de Riemann* o bien *R-integrable* o simplemente *integrable*, si para $\varepsilon > 0$ dado, existe una partición $\mathcal{P}(\varepsilon)$ tal que

$$\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}(\varepsilon) \implies \bar{S}(f, \mathcal{Q}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}) < \varepsilon.$$

De ahí se comprueba que hay un número $J \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{\mathcal{P}} \underline{S}(f, \mathcal{P}) = J = \inf_{\mathcal{P}} \bar{S}(f, \mathcal{P})$, donde el supremo y el ínfimo aborda todas las particiones \mathcal{P} de $[a, b]$. Este número es la integral de f sobre $[a, b]$, escrito¹⁴

$$J = \int_a^b f(t) dt. \quad \diamond$$

Obsérvese que una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

Proposición 1.40. *Una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cuyo dominio es un intervalo finito acotado, es uniformemente continua y también integrable.*

Demostración. Si f no fuera uniformemente continua, entonces existiría algún $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, habría $s_n, t_n \in [a, b]$ con $|s_n - t_n| < \frac{1}{n}$ pero $|f(s_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon_1$.

Por el Corolario (1.26) al teorema de Bolzano y Weierstrass, $\{s_n\}$ tendría una sub-secuencia convergente: $s_{n_k} \rightarrow u \in [a, b]$ cuando $k \rightarrow \infty$. En vista de que $|s_{n_k} - t_{n_k}| < 1/n_k$ también se ve que $t_{n_k} \rightarrow u$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Por hipótesis, f es continua en u , y por el Lema 1.14 se obtendría

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(s_{n_k}) = f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n_k}), \quad \text{así que} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f(s_{n_k}) - f(t_{n_k})| = 0,$$

lo cual contradice $|f(s_{n_k}) - f(t_{n_k})| \geq \varepsilon_1$ para todo k . Por lo tanto, f es uniformemente continua en $[a, b]$.

¹⁴La integral de Riemann puede definirse de otra manera, y así se hace en muchos libros de texto. El criterio de integrabilidad aquí expuesto se debe al propio Riemann y la definición de J sigue el enfoque de Darboux. Sin embargo, se sabe que esta “integral de Darboux” existe si y solo si la integral usual de Riemann existe y que sus valores coinciden. Véase, por ejemplo, la sección 5.4 del libro de Schröder.

Sea dado $\varepsilon > 0$; existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$s, t \in [a, b] \text{ con } |s - t| < \frac{1}{N} \implies |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Sea \mathcal{P}_N la partición en subintervalos iguales de longitud $(b - a)/N$:

$$\mathcal{P}_N = \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \quad \text{con} \quad t_m := \frac{N - m}{N} a + \frac{m}{N} b \quad \text{para} \quad m = 0, 1, \dots, N.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}_N &\implies \bar{S}(f, \mathcal{Q}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P}_N) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_N) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (M_i(f) - m_i(f)) \frac{b - a}{N} < \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es R -integrable sobre $[a, b]$. \square

Proposición 1.41. Sea $\{f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones integrables que converge uniformemente a una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es también integrable sobre $[a, b]$ y se verifica

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt. \quad (\text{I.10})$$

Demostración. Sea dado $\varepsilon > 0$. Tómesese $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3(b - a)} \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

Como f_N es integrable sobre $[a, b]$, hay una partición \mathcal{P} de $[a, b]$ tal que

$$\bar{S}(f_N, \mathcal{P}) - \underline{S}(f_N, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Las desigualdades

$$f_N(t) - \frac{\varepsilon}{3(b - a)} \leq f(t) \leq f_N(t) + \frac{\varepsilon}{3(b - a)}, \quad \text{para} \quad t \in [a, b],$$

conllevan las estimaciones

$$\underline{S}(f_N, \mathcal{P}) - \frac{\varepsilon}{3} \leq \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{S}(f_N, \mathcal{P}) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

En consecuencia,

$$\bar{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{S}(f_N, \mathcal{P}) - \underline{S}(f_N, \mathcal{P}) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Esto establece que f es integrable sobre $[a, b]$.

Además, si $n \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)} dt = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε era arbitrario, esto verifica (1.10). \square

Corolario 1.42. Si una serie de funciones $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ converge uniformemente sobre $[a, b]$ a una función $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, y si cada f_k es integrable sobre $[a, b]$, entonces s es también integrable sobre $[a, b]$ y se verifica

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(t) dt. \quad (1.11)$$

Demostración. Una suma finita $s_n(t) := f_0(t) + f_1(t) + \cdots + f_n(t)$ de funciones integrables es integrable. El resultado sigue al aplicar la Proposición anterior a las sumas parciales s_n . \square

En particular, al la luz del Ejemplo 1.38, una serie de potencias puede ser integrado término por término, dentro de su intervalo de convergencia. También es cierto que una serie de potencias puede ser derivado término por término, no obstante que el análogo del Corolario 1.42 es *falso*: si una serie de funciones diferenciables converge uniformemente sobre $[a, b]$, la derivada de la suma (si existe) no tienen que coincidir con la suma de las derivadas. Lo que sucede, para series de potencias, es que las tres series

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (t - t_0)^{k-1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (t - t_0)^{k+1}$$

tienen *el mismo radio de convergencia* R . Si se aplica el Corolario 1.42 a la primera serie dentro de un subintervalo cerrado $[t_0 - r, t_0 + r]$ de $(t_0 - R, t_0 + R)$, entonces su integral coincide con la segunda; y el teorema fundamental de cálculo permite concluir que la derivada de la segunda coincide con la primera en $(t_0 - R, t_0 + R)$.

1.5 Aproximación de funciones continuas por polinomios

Definición 1.43. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en I si para cada $t_0 \in I$, el límite siguiente existe:

$$f'(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}. \quad \diamond$$

Una función diferenciable es continua: dado $\varepsilon > 0$, tómese $\delta_1 > 0$ tal que

$$|h| < \delta_1 \implies t_0 + h \in I, \quad \text{con} \quad \left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - f'(t_0) \right| < 1.$$

En seguida, tómese $\delta := \min \left\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{1 + |f'(t_0)|} \right\}$, de modo que

$$|h| < \delta \implies t_0 + h \in I, \quad \text{con} \quad |f(t_0 + h) - f(t_0)| < |h|(1 + |f'(t_0)|) < \varepsilon.$$

Definición 1.44. Una función diferenciable $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un intervalo abierto I , es *continuamente diferenciable*, o **de clase C^1** en I , si la derivada $f': I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f'(t)$ es continua en I .

Si la función f' es a su vez diferenciable en I , dícese que f es *dos veces diferenciable* en I . Si la segunda derivada $f''(t) \equiv (f')'(t)$ es continua en I , la función f es **de clase C^2** en I .

Es usual escribir $f^{(0)}(t) \equiv f(t)$, $f^{(1)}(t) \equiv f'(t)$, $f^{(2)}(t) \equiv f''(t)$. Recursivamente, si $f^{(k-1)}(t)$ es diferenciable en I , se escribe $f^{(k)}(t) := (f^{(k-1)})'(t)$; y si $f^{(k)}$ es continua, entonces f es **de clase C^k** en I .

Dícese que f es *suave*, o *indefinidamente diferenciable*, en I si f es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}^*$. \diamond

Definición 1.45. Cada función suave da lugar a una **serie de Taylor** centrado en t_0 , dada por la fórmula

$$\underline{f}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k. \quad (1.12)$$

Si esta serie de potencias tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces al tomar r con $0 < r < R$ tal que $[t_0 - r, t_0 + r] \subset I$, la serie converge uniformemente a una función continua $\underline{f}: [t_0 - r, t_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$, que además es suave en el intervalo abierto $(t_0 - r, t_0 + r)$.

Dícese que la función original f es **analítica** en I si para cada $t_0 \in I$ hay un intervalo abierto $(t_0 - r_0, t_0 + r_0) \subseteq I$ en donde la serie de Taylor converge a una suma $\underline{f}(t)$ y además $\underline{f}(t) \equiv f(t)$ para $|t - t_0| < r_0$. \diamond

Ejemplo 1.46. Desafortunadamente, la suma de la serie $\underline{f}(t)$ no necesariamente coincide con $f(t)$ para $t \neq t_0$. Considérese la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siguiente:

$$g(t) := e^{-1/t^2} \llbracket t > 0 \rrbracket. \quad (1.13)$$

En el intervalo $(0, \infty)$, $g(t) \equiv e^{-1/t^2}$ es suave. Sus primeras derivadas, para $t > 0$, son:

$$g'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}, \quad g''(t) = \frac{-6t^2 + 4}{t^6} e^{-1/t^2}, \quad g'''(t) = \frac{24t^4 - 36t^2 + 8}{t^9} e^{-1/t^2}.$$

Es fácil comprobar por inducción que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un polinomio p_k de grado k tal que, para $k \geq 1$:

$$g^{(k)}(t) = p_{k-1}(t^2) t^{-3k} e^{-1/t^2} \quad \text{para } t > 0.$$

También, en el intervalo $(-\infty, 0)$, la función $g(t) \equiv 0$ es trivialmente suave. Basta, entonces, considerar su comportamiento en $t_0 = 0$. Fíjese que $g(0) = 0$ por la fórmula (1.13). Entonces

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} e^{-1/h^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2} = 0$$

por la regla de l'Hôpital; mientras $\lim_{h \uparrow 0} g(h)/h = 0$ trivialmente. Entonces g es diferenciable en 0, con $g'(0) = 0$. Además, $\lim_{t \downarrow 0} g'(t) = 0$ por la regla de l'Hôpital. Se concluye que g' es continua en 0 y que g es de clase C^1 en \mathbb{R} .

Es un ejercicio comprobar, por inducción sobre k , que $\lim_{h \downarrow 0} g^{(k)}(h)/h = 0$ y que $\lim_{t \downarrow 0} g^{(k+1)}(t) = 0$, así que g es de clase C^k en \mathbb{R} , con $g^{(k)} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pero esto dice que la serie de Taylor (centrado en 0) es idénticamente nula: $\underline{g}(t) \equiv 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\underline{g}(t) \neq g(t)$ para $t > 0$, se ha obtenido *una función suave que no es analítica* alrededor de 0. \diamond

► Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función $(n+1)$ veces diferenciable – y por ende de clase C^n – en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Si f no es suave, la serie de Taylor no está disponible; pero en todo caso la suma parcial s_n de (1.12) es un *polinomio* que sirve como una *aproximación* para f en un intervalo centrado en $t_0 \in I$. El error de esta aproximación está dado por el teorema de Taylor, que sigue.

Teorema 1.47 (Taylor). *Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función $(n+1)$ veces diferenciable en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$; tómese $t_0 \in I$. Entonces f es la suma de un **polinomio de Taylor** y un resto:*

$$f(t) = P_{f,n}(t) + R_{f,n}(t) \equiv \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + R_{f,n}(t),$$

en donde el **resto** $R_{f,n}(t)$ tiene la forma:

$$R_{f,n}(t) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1}$$

para algún τ tal que $\tau \in (t_0, t)$ si $t_0 < t$; o bien $\tau \in (t, t_0)$ si $t < t_0$.

Demostración. Elíjase $t \in I$ con $t \neq t_0$, y sea $u \in \mathbb{R}$ el número definido por la ecuación

$$\frac{u}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1} = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k.$$

Defínase una función auxiliar $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(s) := f(t) - f(s) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(s)}{k!} (t-s)^k - \frac{u}{(n+1)!} (t-s)^{n+1}.$$

La hipótesis del teorema implica que h es diferenciable en I . La fórmula para la derivada de h es

$$\begin{aligned} h'(s) &= -f'(s) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(s)}{k!} (t-s)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(s)}{(k-1)!} (t-s)^{k-1} + \frac{u}{n!} (t-s)^n \\ &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(s)}{k!} (t-s)^k + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m+1)}(s)}{m!} (t-s)^m + \frac{u}{n!} (t-s)^n \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!} (t-s)^n + \frac{u}{n!} (t-s)^n. \end{aligned}$$

(Se presenta un fenómeno “telescopico”: al cambiar el índice de la segunda sumatoria con $m := k - 1$, los términos cancelan en pares, salvo dos términos que sobreviven.)

Es evidente que $h(t) = 0$ y la definición de u dice que $h(t_0) = 0$. Por el teorema de Rolle,¹⁵ hay un punto τ entre t_0 y t tal que $h'(\tau) = 0$. Del despliegue anterior, se concluye que $u = f^{(n+1)}(\tau)$. \square

El uso del teorema de Rolle en la demostración anterior indica que la ubicación exacta del punto τ no está disponible. Sin embargo, hay una fórmula alternativa de expresar el residuo, mediante *la forma integral del resto*:

$$R_{f,n}(t) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t (t-s)^n f^{(n+1)}(s) ds,$$

si f es de clase C^{n+1} en I . Esta fórmula se verifica fácilmente mediante integración por partes.

Ejemplo 1.48. La serie de Taylor, centrado en $t_0 = 0$, de la función analítica sen t es

$$\text{sen } t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

El resto $R_{\text{sen},5}(t) = R_{\text{sen},6}(t)$ tiene la forma

$$R_{\text{sen},6}(t) = -\cos \tau \frac{t^7}{7!}, \quad \text{así que} \quad |R_{\text{sen},6}(t)| \leq \frac{|t|^7}{7!}.$$

¹⁵Se asume conocido la demostración del teorema de Rolle: si $g(a) = g(b) = 0$ y si g es diferenciable en (a, b) , entonces hay un punto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Se ha usado la desigualdad $|\cos \tau| \leq 1$ para eliminar τ y obtener una estimación del error. En el intervalo $[-\pi, \pi]$, por ejemplo, se obtiene

$$|\sin t - P_{\text{sen},6}(t)| = |R_{\text{sen},6}(t)| \leq \frac{\pi^7}{7!} < \frac{3020.3}{5040} < 0.6.$$

De modo similar, $|R_{\text{sen},8}(t)| \leq \pi^9/9! < 0.083$ para $t \in [-\pi, \pi]$. \diamond

En resumen: si una función f posee suficientes derivadas de orden superior, puede ser aproximado *de manera uniforme* por el polinomio en un intervalo finito y cerrado $J \subset \mathbb{R}$:

$$\|f - P_{f,n}\|_J = \sup_{t \in J} |f(t) - P_{f,n}(t)| \leq C_n,$$

con la esperanza de que $C_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

► Las hipótesis de diferenciabilidad no son necesarias. En 1885, Weierstrass descubrió que *una función continua cualquiera* admite aproximación uniforme por polinomios en un subintervalo finito cerrado de su dominio. Su demostración estaba basada en la teoría de funciones analíticas de variable compleja. En 1912, Sergei Bernstein descubrió una demostración sencilla que *exhibe* un juego de polinomios explícitos que convergen uniformemente a la función dada.

El cambio de variable afín,

$$s := (1 - t)a + tb,$$

define una biyección continua entre los intervalos $[0, 1]$ y $[a, b]$. El cambio de variable inverso, $t = (s - a)/(b - a)$, es también continuo. Dadas dos funciones $g, q: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sean $f, p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones correspondientes, definidas por

$$f(t) := g((1 - t)a + tb), \quad p(t) := q((1 - t)a + tb).$$

Es evidente que

$$\|f - p\|_{[0,1]} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - p(t)| = \sup_{a \leq s \leq b} |g(s) - q(s)| = \|g - q\|_{[a,b]}.$$

Luego, para aproximar $g(s)$ por $q(s)$ uniformemente sobre $[a, b]$, es suficiente aproximar $f(t)$ por $p(t)$ uniformemente sobre $[0, 1]$. En adelante, basta considerar aproximación uniforme sobre el intervalo $I = [0, 1]$.

Definición 1.49. Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $n \in \mathbb{N}$. El n -ésimo polinomio de Bernstein asociado con f es la función $B_n(f): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$B_n(f; t) \equiv B_n(f)(t) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k} \quad (1.14)$$

para $t \in \mathbb{R}$. Es evidente que $B_n(f)$ es un polinomio de grado $\leq n$. \diamond

Esta definición está inspirada por la **distribución binomial** en la teoría de probabilidad. Considérese los *pesos*:

$$\pi_{n,k}(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad \text{para } t \in [0, 1]. \quad (1.15)$$

Fíjese que $\pi_{n,k}(t) \geq 0$ para $0 \leq t \leq 1$ (y de hecho $\pi_{n,k}(t) > 0$ para $0 < t < 1$). Además, para n, t fijos, estas cantidades tienen suma 1:

$$\sum_{k=0}^n \pi_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = (t + 1 - t)^n = 1.$$

Entonces la sumatoria (1.14) es un *promedio ponderado* de los valores de f en los nodos de la partición $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ de $I = [0, 1]$. En particular, está claro que

$$\|B_n(f)\|_I \leq \max\{|f(\frac{k}{n})| : k = 0, 1, \dots, n\} \leq \sup\{|f(t)| : 0 \leq t \leq 1\} = \|f\|_I.$$

Ejemplo 1.50. Sean $f_0, f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ los polinomios de bajo grado,

$$f_0(t) \equiv 1, \quad f_1(t) := t, \quad f_2(t) := t^2.$$

Entonces

$$B_n(f_0; t) \equiv 1, \quad B_n(f_1; t) = t, \quad B_n(f_2; t) = \frac{n-1}{n} t^2 + \frac{1}{n} t.$$

En efecto: la igualdad $B_n(f_0; t) \equiv 1$ es simplemente la suma $\sum_{k=0}^n \pi_{n,k}(t) = 1$ de nuevo. Para la función f_1 , vale la pena observar que

$$\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \quad \text{para } k \geq 1,$$

así que

$$B_n(f_1; t) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} t^{r+1} (1-t)^{n-1-r} = t B_{n-1}(f_0; t) = t.$$

(Esto dice que la *media* de la distribución binomial (1.15) es igual a t .)

Del mismo modo, se puede notar que

$$\frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n} \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1}.$$

De ahí se concluye que

$$B_n(f_2; t) = \frac{n-1}{n} t B_{n-1}(f_1, t) + \frac{1}{n} t B_{n-1}(f_0, t) = \frac{(n-1)t^2 + t}{n}.$$

Una consecuencia notable de estas igualdades es la estimación

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} &= t^2 B_n(f_0; t) - 2t B_n(f_1; t) + B_n(f_2; t) \\ &= t^2 - 2t^2 + \frac{nt^2 + t - t^2}{n} = \frac{t(1-t)}{n} \leq \frac{1}{4n}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

¶ Entre otras cosas, este cálculo dice que la *variancia* de la distribución binomial (1.15) es igual a $t(1-t)/n$. ¶

Proposición 1.51 (Bernstein). *Sea $f: I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Para $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ cualesquiera, la siguiente estimación es válida:*

$$\|f - B_n(f)\|_I \leq \frac{\|f\|_I}{2n\delta^2} + \sup\{|f(t) - f(s)| : |t - s| \leq \delta\}. \quad (1.17)$$

En consecuencia, los polinomios $B_n(f)$ aproximan la función f uniformemente sobre I :

$$\|f - B_n(f)\|_I \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Demostración. Para cada $t \in [0, 1]$, los índices k de la suma (1.14) pueden agruparse en dos partes, $\{0, 1, 2, \dots, n-1, n\} = A_t \uplus B_t$, donde

$$A_t := \left\{ k : \left|t - \frac{k}{n}\right| \geq \delta \right\} \quad \text{y} \quad B_t := \left\{ k : \left|t - \frac{k}{n}\right| < \delta \right\}.$$

Entonces

$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \begin{cases} 2\|f\|_I & \text{si } k \in A_t, \\ \sup_{|t-s| \leq \delta} |f(t) - f(s)| & \text{si } k \in B_t. \end{cases}$$

La diferencia $f(t) - B_n(f; t)$ se reparte en dos sumatorias:

$$\begin{aligned} f(t) - B_n(f; t) &= \sum_{k=0}^n \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \sum_{k \in A_t} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{k \in B_t} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}. \end{aligned}$$

La segunda sumatoria a la derecha obedece la estimación

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in B_t} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right| &\leq \sum_{k \in B_t} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &\leq \sup_{|t-s| \leq \delta} |f(t) - f(s)| \sum_{k \in B_t} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &\leq \sup_{|t-s| \leq \delta} |f(t) - f(s)|. \end{aligned}$$

Para $k \in A_t$ se sabe que $(t - k/n)^2 \geq \delta^2$, esto es, $\delta^{-2}(t - k/n)^2 \geq 1$. Entonces la primera sumatoria a la derecha satisface

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in A_t} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right| &\leq 2\|f\|_I \sum_{k \in A_t} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &\leq \frac{2\|f\|_I}{\delta^2} \sum_{k \in A_t} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &\leq \frac{2\|f\|_I}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{\|f\|_I}{2n\delta^2}, \end{aligned}$$

en vista de (1.16). Los dos términos mayorizantes son independientes de t ; por lo tanto, la estimación (1.17) está demostrada.

La Proposición 1.40 muestra que la función continua f es *uniformemente* continua sobre I . Sea dado $\varepsilon > 0$; entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup\{|f(t) - f(s)| : |t - s| \leq \delta\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora tómese $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $N \geq \|f\|_I/\delta^2\varepsilon$. Entonces

$$n \geq N \implies \|f - B_n(f)\|_I < \frac{\|f\|_I}{2n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces $\|f - B_n(f)\|_I \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. □

Desafortunadamente, la convergencia de los polinomios de Bernstein, aunque uniforme, es bastante lenta. Por ejemplo, para la función cuadrática f_2 , la diferencia exacta es

$$B_n(f_2; t) - f_2(t) = \frac{t(1-t)}{n}, \quad \text{así que} \quad 0 \leq B_n(f_2; t) - f_2(t) \leq \frac{1}{4n}.$$

(El máximo se alcanza en $t = \frac{1}{2}$.) Por eso, no es un método práctico para obtener aproximaciones numéricas. Sin embargo, su importancia teórica es ineludible, porque no exige propiedades de diferenciabilidad de la función f que se quiere aproximar.

2 Espacios métricos y su topología

El análisis de funciones continuas de variables reales comprende dominios muchos más generales que los intervalos de la recta \mathbb{R} . En primer lugar, es posible considerar funciones de varias variables reales, cuyos dominios son ciertas partes de \mathbb{R}^n ; en este curso, esto será el caso de mayor interés. Sin embargo, es prudente manejar conjuntos aun más amplios, tales como la familia de todas las sucesiones de Cauchy reales o la familia de todas las funciones continuas sobre un intervalo dado. Tales conjuntos deben ser dotados de una estructura común que permite abordar los conceptos de límites y convergencia.

Esa estructura fue introducida en 1906 por Maurice Fréchet en su tesis doctoral; poco después Hausdorff dio el nombre de *espacios métricos* a los conjuntos estudiados por Fréchet. El propio Hausdorff introdujo un concepto rival, los sistemas de vecindarios (de puntos en un conjunto dado); estos fueron simplificados por Kuratowski quien elaboró la idea de un *espacio topológico*.¹ Resulta que hay muchos espacios topológicos que no son métricos; pero éstos dan un acceso más inmediato a los procesos de análisis y en este curso no se abordan topologías más generales.

2.1 Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 2.1. Una métrica sobre un conjunto X es una función $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que cumple las tres propiedades siguientes:

- (a) *Simetría*: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
- (b) *Desigualdad triangular*: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ para $x, y, z \in X$.
- (c) *Positividad*: $\rho(x, x) = 0$ pero $\rho(x, y) > 0$ para $x \neq y$ en X .

La pareja (X, ρ) se llama un **espacio métrico**. ◇

Una función $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que cumple (a) y (b) y $\rho(x, x) = 0$ para $x \in X$ se llama una **semimétrica** (a veces, *pseudométrica*) sobre X . Dada una tal semimétrica, se define una relación de equivalencia sobre X por

$$x \sim y \quad \text{si y solo si} \quad \rho(x, y) = 0.$$

Sobre el conjunto cociente X/\sim de clases de equivalencia, la fórmula

$$\tilde{\rho}([x], [y]) := \rho(x, y)$$

¹Las obras originales son: Maurice René Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22** (1906), 1–74; Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (primera edición), Veit, Leipzig, 1914; Kazimierz Kuratowski, *Sur l'opération \bar{A} de l'Analyse Situs*, Fundamenta Mathematicae **3** (1922), 182–199.

está bien definida; y es fácil verificar que $\tilde{\rho}: X/\sim \times X/\sim \rightarrow [0, \infty)$ es una métrica. Esta la *métrica inducida* por la semimétrica ρ .

Ejemplo 2.2. Si $z, w \in \mathbb{C}$, la función

$$\rho(z, w) := |z - w|$$

es una métrica sobre \mathbb{C} , en vista de la desigualdad triangular (1.1) para el valor absoluto. En el plano complejo $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $\rho(z, w)$ es la *distancia entre los puntos* z y w .

Como caso particular, $\rho(s, t) := |s - t|$ es una métrica sobre \mathbb{R} . \diamond

Definición 2.3. En el espacio vectorial \mathbb{R}^n , el **producto escalar** de un par de vectores $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ es

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

La norma euclidiana del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define como

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Esta es la distancia euclidiana del origen $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ al punto \mathbf{x} . La *distancia entre dos puntos* cualesquiera de \mathbb{R}^n está dada por

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad \diamond$$

El producto escalar y la norma obedecen la *desigualdad de Cauchy*:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2,$$

que generaliza la desigualdad $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, obtenida de la relación $2abcd \leq a^2 d^2 + b^2 c^2$ al notar que $(ad - bc)^2 \geq 0$.

La desigualdad de Cauchy también puede escribirse en la forma

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Entonces resulta que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2, \end{aligned}$$

lo cual implica la *desigualdad triangular* para normas:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \quad (2.1)$$

Al reemplazar $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z} - \mathbf{y}$, se obtiene la desigualdad triangular para ρ :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|,$$

esto es,

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Se concluye que ρ es una métrica sobre \mathbb{R}^n .

Ejemplo 2.4. Defínase una función $\lambda: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ por

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Es evidente que $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ y que $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Además, para $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, se verifica la desigualdad triangular:

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^n |x_k - z_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Entonces λ es una métrica sobre \mathbb{R}^n , que no coincide con la métrica euclidiana ρ de la Definición 2.3. \diamond

Definición 2.5. En un espacio métrico (X, ρ) cualquiera, la **bola abierta** de radio $r > 0$ centrado en el punto $x \in X$ es el conjunto

$$B(x; r) := \{ y \in X : \rho(x, y) < r \}.$$

La **bola cerrada** de radio $r > 0$ centrado en x es el conjunto

$$\bar{B}(x; r) := \{ y \in X : \rho(x, y) \leq r \}.$$

Es evidente que

$$B(x; r) \subseteq \bar{B}(x; r) \quad \text{y} \quad \bar{B}(x; r) \subseteq B(x; s) \quad \text{cuando} \quad r < s.$$

Dícese que $V \subseteq X$ es un **vecindario** del punto x si existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq V$. O sea: un vecindario de x es un conjunto que incluye una bola abierta centrado en x . \diamond

Lema 2.6. Una bola abierta es un vecindario de cada uno de sus puntos.

Demostración. Sea y un punto de la bola abierta $B(x; r)$. Se debe mostrar que hay un radio $\delta > 0$ tal que $B(y; \delta) \subseteq B(x; r)$. Véase la Figura 2.1. Tómese

$$\delta := r - \rho(x, y).$$

Fíjese que $\delta > 0$ porque $y \in B(x; r)$ es sinónimo de $\rho(x, y) < r$. Si $z \in B(y; \delta)$, entonces

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + \delta = r,$$

así que $z \in B(x; r)$. Se ha comprobado que $B(y; \delta) \subseteq B(x; r)$. \square

Definición 2.7. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Un conjunto $A \subseteq X$ es un **conjunto abierto** en X , o simplemente **abierto** en X , si para cada $x \in A$ existe un radio $r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq A$. Dicho de otra manera: *un abierto en X es un vecindario de cada uno de sus puntos.* \diamond

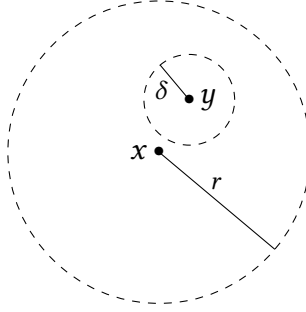


Figura 2.1: Una bola abierta es un conjunto abierto

Lema 2.8. Una parte $A \subseteq X$ es abierta si y solo si A es una unión de bola abiertas.

Demostración. El Lema 2.6 dice que una bola abierta es un conjunto abierto en X , así que el término “bola abierta” no es ambiguo.

Ahora se puede observar que una unión de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto. Concretamente, sea

$$A = \bigcup_{\alpha \in J} A_{\alpha}$$

donde cada A_{α} es un abierto en X . Entonces si $x \in A$, debe haber al menos un miembro A_{β} de la unión tal que $x \in A_{\beta}$. Como A_{β} es abierto, hay $r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq A_{\beta} \subseteq A$. Esto demuestra que la unión A es un abierto en X . \square

Nótese que en la demostración anterior, el conjunto índice J no es necesariamente finita ni numerable. En cambio, una intersección numerable de abierto no es necesariamente abierto. Por ejemplo, en \mathbb{R} con la métrica usual $\rho(s, t) := |s - t|$, un intervalo abierto (a, b) es una bola abierta, con centro $\frac{1}{2}(a + b)$ y radio $\frac{1}{2}(b - a)$; pero la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ es un solo punto, que no es un abierto en \mathbb{R} .

Sin embargo, una intersección *finita* de abiertos es abierto: si $x \in A_1 \cap \dots \cap A_m$ con cada A_k abierto en X , entonces hay radios $r_1, \dots, r_m > 0$ tales que $B(x; r_k) \subseteq A_k$ para $k = 1, \dots, m$. Tómese $r := \min\{r_1, \dots, r_m\}$. Entonces $B(x; r) \subseteq B(x; r_k) \subseteq A_k$ para cada k , así que $B(x; r) \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_m$.

Definición 2.9. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Un conjunto $C \subseteq X$ es un *conjunto cerrado* en X , o simplemente **un cerrado** en X , si su complemento $X \setminus C$ es abierto. \diamond

Lema 2.10. Una bola cerrada $\bar{B}(x; r)$ es un conjunto cerrado en X .

Demostración. El complemento de la bola cerrada $\bar{B}(x; r)$ es

$$X \setminus \bar{B}(x; r) = \{y \in X : \rho(x, y) > r\} = \bigcup_{y \notin \bar{B}(x; r)} B(y; \rho(x, y) - r).$$

En otras palabras: si $y \notin \bar{B}(x; r)$, de modo que $\rho(x, y) > r$, entonces la bola abierta centrada en y con radio $\rho(x, y) - r$ no tiene intersección con $\bar{B}(x; r)$. En efecto, tómese $z \in X$ tal que $\rho(y, z) < \rho(x, y) - r$; la desigualdad triangular implica que

$$\rho(x, z) \geq \rho(x, y) - \rho(z, y) > r.$$

En resumen: se ha expresado $X \setminus \bar{B}(x; r)$ como una unión de bolas abiertas. Del Lema 2.8 se concluye que $X \setminus \bar{B}(x; r)$ es abierto, e *ipso facto* $\bar{B}(x; r)$ es cerrado. \square

Al aplicar las leyes de de Morgan a las propiedades de conjuntos abiertos, se deduce que una *intersección cualquiera* de conjuntos cerrados es también cerrada, y que una *unión finita* de cerrados es también cerrada.

Definición 2.11. La **clausura** de una parte cualquiera $E \subseteq X$ es el conjunto cerrado más pequeño que lo incluye:

$$\bar{E} := \bigcap \{ C \text{ cerrado en } X : E \subseteq C \}.$$

Fíjese que esta intersección es cerrada, que $E \subseteq \bar{E}$ y que todo cerrado C tal que $E \subseteq C$ incluye la intersección, es decir, $\bar{E} \subseteq C$.

Al tomar complementos, el interior de E es el abierto más grande incluido en E :

$$E^\circ := \bigcup \{ A \text{ abierto en } X : A \subseteq E \}.$$

Fíjese que esta unión es abierta, que $E^\circ \subseteq E$ y que todo abierto A tal que $A \subseteq E$ es parte de la unión, es decir, $A \subseteq E^\circ$. \diamond

Para que estas manejos de conjuntos tengan sentido, es importante recalcar que en un espacio métrico cualquiera, el conjunto pleno X y el conjunto vacío \emptyset *son abiertos*. El caso de X está claro. Para el caso de \emptyset , debe notarse que la condición lógica

$$x \in A \implies B(x; r) \subseteq A \quad \text{para algún } r > 0$$

es trivialmente satisfecha si no hay punto alguno x en A . Al tomar complementos, se ve que \emptyset y X son también cerrados en X . Entonces, en las definiciones de \bar{E} y E° , se puede tomar $C = X$ o bien $A = \emptyset$ para que la intersección y la unión pueden formarse.

Nótese también que el interior del complemento de E , $(X \setminus E)^\circ$, lo cual se llama el exterior de E , tiene complemento \bar{E} :

$$X \setminus (X \setminus E)^\circ = \bigcap \{ C \text{ cerrado} : X \setminus C \subseteq X \setminus E \} = \bigcap \{ C \text{ cerrado} : E \subseteq C \} = \bar{E}.$$

Definición 2.12. Sea (X, ρ) un espacio métrico y sea $E \subseteq X$. Un **punto de adherencia** de E es un elemento $x \in X$ tal que cada bola centrado en x tenga intersección con E ; es decir $B(x; r) \cap E \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Obsérvese que $y \in X$ *no es* un punto de adherencia de E si $X \setminus E$ incluye alguna bola $B(y; s)$. Esto significa que los puntos de no adherencia constituyen el exterior de E , así que la totalidad de puntos de adherencia es precisamente la clausura \bar{E} .

¶ Los puntos $z \in \bar{E} \setminus E$, si los hubiera, a veces se llaman **puntos de acumulación** de E . Para cada $r > 0$, la intersección $B(x; r) \cap E$ tiene al menos un punto y distinto de z . ¶ \diamond

Definición 2.13. Sea (X, ρ) un espacio métrico y sea $E \subseteq X$. La **frontera** de E es la totalidad de puntos que no pertenecen al interior ni al exterior de E :

$$\partial E := X \setminus (E^\circ \cup (X \setminus E)^\circ) = X \setminus (X \setminus E)^\circ \setminus E^\circ = \bar{E} \setminus E^\circ.$$

Fíjese que $x \in \partial E$ si y solo si $B(x; r) \cap E \neq \emptyset$ y $B(x; r) \setminus E \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. \diamond

Nótese que $\partial X = \bar{X} \setminus X^\circ = X \setminus X = \emptyset$, y de igual manera $\partial \emptyset = \emptyset$. En general, una parte $E \subseteq X$ tiene frontera vacía si y solo si E es cerrado y abierto a la vez.

Ejemplo 2.14. Sea X un conjunta cualquiera, y defínase una métrica σ sobre X por

$$\sigma(x, y) := \llbracket x \neq y \rrbracket = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que esta σ cumple las propiedades (a), (b), (c) de la Definición 2.1. Esta es la **métrica discreta** sobre X .

Obsérvese que las bolas para esta métrica se describen así:

$$B_\sigma(x; r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } 0 < r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1; \end{cases} \quad \bar{B}_\sigma(x; r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } 0 < r < 1, \\ X & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

En particular, cada singulete $\{x\}$ es abierto y cerrado a la vez. De hecho, cada $E \subseteq X$ es abierto (por ser una unión de singuletes) y cerrado (porque $X \setminus E$ es abierto).

Nótese el fenómeno curioso de que la clausura de la bola abierta $B_\sigma(x; 1)$ no coincide con la bola cerrada $\bar{B}_\sigma(x; 1)$, si X posee al menos dos puntos distintos. \diamond

Definición 2.15. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Un conjunto $E \subseteq X$ es **denso** en X si $\bar{E} = X$.

Si $E \subseteq F \subseteq \bar{E}$, dícese que E es *denso en* F .

El espacio métrico (X, ρ) se llama **separable** si incluye una parte $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es *denso y numerable*. \diamond

Lema 2.16. \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , con respecto a la métrica usual.

Demostración. Si $t \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, se debe mostrar que el intervalo $B(t, r) = (t - r, t + r)$ contiene un número racional. Como \mathbb{R} es arquimediano, hay un entero positivo n tal que $1/2r < n$, y por ende $1/n < 2r$.

Sin perder generalidad, se puede suponer que $t + r > 0$; en el caso contrario, bastaría encontrar un número racional $-q \in (-t - r, -t + r)$ para así obtener $q \in (t - r, t + r)$.

Hay $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $n(t + r) \leq m$, o sea, $t + r \leq m/n$. Sea $k \in \mathbb{N}^*$ el menor entero positivo tal que $t + r \leq k/n$, de modo que $(k - 1)/n < t + r$. Ahora resulta que

$$\frac{k - 1}{n} = \frac{k}{n} - \frac{1}{n} > \frac{k}{n} - 2r \geq (t + r) - 2r = t - r,$$

así que $q := (k - 1)/n \in \mathbb{Q}$ cumple $q \in (t - r, t + r)$. \square

Corolario 2.17. Si I es un intervalo en \mathbb{R} , entonces $\mathbb{Q} \cap I$ es denso en I .

Se ha comprobado que tanto \mathbb{R} como todos sus subintervalos son espacios métricos separables.

Proposición 2.18. El un espacio métrico separable (X, ρ) , cualquier abierto es una unión numerable de bolas abiertas.

Demostración. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una parte numerable y densa de X . Considérese la familia numerable de bolas abiertas $\mathcal{B} := \{B(x_n; 1/m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*\}$.

Dada una bola abierta cualquiera $B(y; r)$ con $y \in X$, $r > 0$, tómese m tal que $1/m < r/2$ y enseguida tómese n tal que $x_n \in B(y; 1/m)$. (La selección de x_n es posible porque y pertenece a la clausura X del conjunto denso $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.)

Ahora $\rho(x_n, y) < 1/m$, así que $y \in B(x_n; 1/m)$. Además, si $z \in B(x_n; 1/m)$, entonces

$$\rho(y, z) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, z) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} < r,$$

así que $z \in B(y; r)$. Se ha comprobado que $y \in B(x_n; 1/m) \subseteq B(y; r)$.

Por el Lema 2.6, la bola abierta $B(y; r)$ es una unión de bolas abiertas centradas en cada uno de sus puntos. Entonces

$$B(y; r) = \bigcup \{B(x_n; 1/m) \in \mathcal{B} : B(x_n; 1/m) \subseteq B(y; r)\}.$$

Cualquier abierto A es una unión de tales bolas abiertas $B(y; r)$, por el Lema 2.8, así que

$$A = \bigcup \{B(x_n; 1/m) \in \mathcal{B} : B(x_n; 1/m) \subseteq A\}.$$

Esa unión es numerable, porque la familia \mathcal{B} es numerable. \square

En particular, cualquier abierto de \mathbb{R} es una unión numerable de intervalos abiertos.

Por otro lado, el espacio métrico discreto (\mathbb{R}, σ) no es separable, porque el abierto $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ es una unión disjunta, no numerable, de bolas puntuales $\{t\} = B_\sigma(t; 1)$ con $t \neq t_0$.

Definición 2.19. Si (X, ρ) y (Y, σ) son espacios métricos, una función $f: X \rightarrow Y$ es continua en $x_0 \in X$ si, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x \in X \quad \text{con} \quad \rho(x, x_0) < \delta \implies \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Dícese que f es continua en X si f es continua en x_0 para todo $x_0 \in X$. \diamond

Esta es una generalización directa de la Definición 1.11. El Lema 1.14 también admite una generalización directa, que dice que $f: X \rightarrow Y$ es continua si y solo si f preserva la convergencia de sucesiones. Dícese que una sucesión $\{x_n\}$ en X converge a $z \in X$, o bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies \rho(x_n, z) < \varepsilon.$$

Lema 2.20. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función entre dos espacios métricos (X, ρ) y (Y, σ) , entonces f es continua en $z \in X$ si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ conlleva $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(z)$. \square

Otra manera importante de caracterizar la continuidad de una función entre espacios métricos es la siguiente.

Proposición 2.21. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre dos espacios métricos (X, ρ) y (Y, σ) . Estas condiciones son equivalentes:

- (a) f es continua en X ;
- (b) si B es un abierto en Y , entonces la preimagen $f^{-1}(B)$ es un abierto en X .

Demostración. Ad (a) \implies (b): Dado un abierto $B \subseteq Y$, sea $x_0 \in f^{-1}(B)$, es decir, $f(x_0) \in B$. Por la Definición 2.7, hay un radio $\varepsilon > 0$ tal que $B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \subseteq B$. Por la continuidad de f , existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x_0) < \delta \implies \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \subseteq B,$$

así que $B_\rho(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B)$. Se ha comprobado que $f^{-1}(B)$ es un vecindario de cualquiera de sus puntos x_0 , lo cual significa que $f^{-1}(B)$ es un abierto en X .

Ad (b) \implies (a): Tómesese $x_1 \in X$ y elíjase $\tilde{\varepsilon} > 0$. Entonces la bola $B_\sigma(f(x_1), \tilde{\varepsilon})$ es abierto en Y , por el Lema 2.6, así que $f^{-1}(B_\sigma(f(x_1), \tilde{\varepsilon}))$ es un abierto en X , siendo x_1 uno de sus puntos. Por ende, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$B_\rho(x_1, \tilde{\delta}) \subseteq f^{-1}(B_\sigma(f(x_1), \tilde{\varepsilon})),$$

y por ende $f(B_\rho(x_1, \tilde{\delta})) \subseteq B_\sigma(f(x_1), \tilde{\varepsilon})$. Esto dice que f es continua en x_1 . Como $x_1 \in X$ es arbitrario, se concluye que f es continua en X . \square

Corolario 2.22. Una función $f: X \rightarrow Y$ entre dos espacios métricos (X, ρ) y (Y, σ) es continua si y solo si cada parte cerrada $D \subseteq Y$ tiene preimagen $f^{-1}(D)$ cerrada en X .

Demostración. Por el Lema 1.10(d), $X \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(Y \setminus D)$; luego D es cerrado en Y si y solo si $Y \setminus D$ es abierto en Y , mientras $f^{-1}(D)$ es cerrado en X si y solo si $X \setminus f^{-1}(D)$ es abierto en X . \square

2.2 Conjuntos compactos en espacios métricos

Entre todos los intervalos de \mathbb{R} , los intervalos cerrados finitos poseen propiedades especiales, debido al teorema de Bolzano y Weierstrass: cada sucesión tiene una subsucesión convergente (cuyo límite pertenece al intervalo), cada función continua real alcanza un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo, cada sucesión de Cauchy es convergente en el intervalo. Estas son consecuencias de una propiedad llamada *compacidad*.

Hay dos maneras de generalizar esta propiedad a espacios métricos en general: se puede enfocar las propiedades de sucesiones, o bien se puede considerar las propiedades de cubrimientos por conjuntos abiertos. [La segunda versión es más general, pues es aplicable a espacios topológicos que no admiten una métrica. Para espacios métricos, los dos enfoques son equivalentes.]

Lema 2.23. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Estas condiciones son equivalentes:

- (a) Cualquier sucesión en X posee al menos un punto adherente.
- (b) Cualquier sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Ad (a) \implies (b): Si $\{x_n\}$ es una sucesión en X , sea z un punto adherente del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. La bola abierta $B(z; 1)$ contiene una entrada x_{n_1} de la sucesión. Al tomar

$$\varepsilon_2 := \min\{\frac{1}{2}, \rho(z, x_1), \rho(z, x_2), \dots, \rho(z, x_{n_1})\},$$

la bola $B(z; \varepsilon_2)$ contiene una entrada x_{n_2} , donde $n_2 > n_1$ necesariamente.

Por inducción se puede elegir, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, una entrada x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in B(z; \varepsilon_k)$, donde

$$\varepsilon_k := \min\{1/k, \rho(z, x_1), \rho(z, x_2), \dots, \rho(z, x_{n_{k-1}})\},$$

lo cual garantiza que $n_k > n_{k-1}$. Entonces $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, tal que $\rho(z, x_{n_k}) < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Es evidente que $x_{n_k} \rightarrow z$ en X cuando $k \rightarrow \infty$.

Ad (b) \implies (a): Sea $\{x_n\}$ es una sucesión en X y sea $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión convergente, con $y = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in X$. Si $r > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K$ implica $\rho(x_{n_k}, y) < r$. En particular, $x_{n_K} \in B(y; r)$. Luego y es un punto adherente del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. \square

Definición 2.24. Una colección de partes abiertas $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$ de un espacio métrico (X, ρ) tales que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = X$ se llama un **cubrimiento abierto**² de X . \diamond

Proposición 2.25 (Lebesgue). *Sea (X, ρ) un espacio métrico en donde cada sucesión posee una subsucesión convergente. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de X . Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in X$, hay algún $U \in \mathcal{U}$ con $B(x; \varepsilon) \subseteq U$.*

Demostración. En efecto, si así no fuera, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ habría un elemento $x_n \in X$ tal que la bola $B(x_n; 1/n)$ no esté incluido en U alguna. Por hipótesis, entonces, habría una subsucesión convergente $x_{n_k} \rightarrow z \in X$. Este punto z debe estar en algún $U \in \mathcal{U}$; y de hecho, por ser U abierto, debe haber $\varepsilon > 0$ con $B(z; \varepsilon) \subseteq U$. Ahora tómese $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq K \implies \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \rho(x_{n_k}, z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, para cada $y \in B(x_{n_k}, 1/n_k)$ valdría

$$\rho(y, z) \leq \rho(y, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, z) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y por ende $B(x_{n_k}, 1/n_k) \subseteq B(z, \varepsilon) \subseteq U$, contrario a la propiedad asumida de $\{x_n\}$. \square

Teorema 2.26. *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *Cada cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X posee un subcubrimiento finito $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}\}$.*
- (b) *Si $\{F_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia de cerrados en X tales que $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = \emptyset$, hay una subfamilia finita $\{F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_m}\}$ tal que $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_m} = \emptyset$.*
- (c) *Cualquier sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Ad(a) \implies (b): Sea dada una familia de cerrados $\{F_\alpha : \alpha \in J\}$ tal que $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = \emptyset$. Al colocar $U_\alpha := X \setminus F_\alpha$, se obtiene un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de X , porque $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = X \setminus \bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = X$. Por hipótesis, $\{U_\alpha\}$ tiene un subcubrimiento finito $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}\}$. De $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_m} = X$ se concluye que $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_m} = \emptyset$.

Ad(b) \implies (c): Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X , y para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese la cola $C_n := \{x_k : k \geq n\}$ y sea $F_n := \overline{C_n}$ su clausura. Para cada colección finita de índices $\{k_1, \dots, k_m\}$, sea $k := \max\{k_1, \dots, k_m\}$; entonces $C_{k_1} \cap \dots \cap C_{k_m} \supseteq C_k$ y en consecuencia $F_{k_1} \cap \dots \cap F_{k_m} \supseteq F_k$; en particular, se ve que $F_{k_1} \cap \dots \cap F_{k_m} \neq \emptyset$. La hipótesis entonces implica que hay al menos un elemento z en $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Si $r > 0$, entonces $z \in F_n = \overline{C_n}$ conlleva $B(z; r) \cap C_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego z es un punto adherente del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. La conclusión sigue por el Lema 2.23.

²Algunos autores escriben recubrimiento abierto; pero no se trata de cubrir el mismo espacio dos veces.

Ad(c) \implies (a): Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento abierto de X .

Por la Proposición 2.25, existe $\varepsilon > 0$ tal que toda bola abierta $B(x; \varepsilon)$ esté incluido en algún $U \in \mathcal{U}$. \llbracket Obviamente, el U depende de x y puede haber varios U que incluyan la bola $B(x; \varepsilon)$. \rrbracket

Tómese $x_1 \in X$ cualquiera. Si $B(x_1, \varepsilon) \neq X$, tómese $x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon)$. En seguida, si $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \neq X$, se puede tomar $x_3 \in X \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$; etcétera. Este proceso debe terminar en un número finito de pasos, porque de lo contrario se habrá construido una sucesión $\{x_n\}$ con $\rho(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ para todo $m \neq n$; pero una tal sucesión no puede tener una subsucesión convergente.

Entonces hay puntos $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $X = B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_m, \varepsilon)$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para cada k hay un abierto $U_{\alpha_k} \in \mathcal{U}$ tal que $B(x_k; \varepsilon) \subseteq U_{\alpha_k}$; y se concluye que $X = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_m}$. \square

Definición 2.27. Un espacio métrico (X, ρ) es **compacto** si cada cubrimiento abierto posee un subcubrimiento finito.

Alternativamente, un espacio métrico es compacto si cumple cualquiera de las tres condiciones equivalentes del Teorema 2.26. En particular, un espacio métrico es compacto si y solo si cualquier sucesión posee una subsucesión convergente.

La propiedad (b) del Teorema 2.26 puede enunciarse de manera contrapositiva, así: si $\{F_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia de cerrados en X tales que $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_m} \neq \emptyset$ para toda subfamilia finita $\{F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_m}\}$, entonces que $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \neq \emptyset$. Esta se llama la **propiedad de intersección finita** de (X, ρ) . \diamond

Definición 2.28. Si (X, ρ) es un espacio métrico y si $E \subseteq X$, la restricción $\rho|_E$ de la función ρ a $E \times E$ define una métrica sobre E . Con esta **métrica inducida**, se considera $(E, \rho|_E)$ como un **subespacio métrico** de (X, ρ) .

Fíjese que una bola abierta en $(E, \rho|_E)$ es de la forma $B_{\rho|_E}(z; r) = E \cap B_\rho(z; r)$, la intersección de E con una bola abierta de X . Al tomar uniones de bolas, se deduce que una **abierto de E** es de la forma $U = \underline{E \cap V}$ donde V es un abierto de X .

Una parte $E \subseteq X$ es una **parte compacta** de X si $(E, \rho|_E)$ es compacto con la métrica inducida. Esto es: si $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia de abiertos en X tales que $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$, entonces hay una subfamilia finita $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_m}\}$ tal que $E \subseteq V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_m}$. \diamond

El Corolario 1.26 (al teorema de Bolzano y Weierstrass) dice que cualquier intervalo cerrado finito $[c, d]$ de \mathbb{R} es compacto en \mathbb{R} .

Lema 2.29. (a) Una parte compacta K de un espacio métrico (X, ρ) es cerrada en X .

(b) Una parte cerrada de un espacio métrico compacto es también compacta.

Demostración. Ad (a): Basta mostrar que el complemento $X \setminus K$ es abierto en X . Si $z \notin K$, considérese la familia de abiertos $V_n := X \setminus \bar{B}(z; 1/n)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Su unión es $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X \setminus \{z\}$. Como $K \subseteq X \setminus \{z\}$, esta familia cubre K .

Como K es compacto, hay índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_R$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^R V_{n_k} = V_{n_R} = X \setminus \bar{B}(z; 1/n_R).$$

Dicho de otra manera, para cada $z \in X \setminus K$ hay una bola abierta $B(z; 1/n_R)$ tal que

$$z \in B(z; 1/n_R) \subseteq \bar{B}(z; 1/n_R) \subseteq X \setminus K.$$

Luego $X \setminus K$ es un vecindario de cada uno de sus puntos, o sea, $X \setminus K$ es abierto en X .

Ad (b): Si C es una parte cerrada de un espacio métrico compacto (K, ρ) , sea $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in K}$ una familia de abiertos en K que cubren C . Entonces $\mathcal{V} \cup \{K \setminus C\}$ es un cubrimiento abierto de K .

Hay índices β_1, \dots, β_m tales que $K = (K \setminus C) \cup V_{\beta_1} \cup \cdots \cup V_{\beta_m}$. Luego $C \subseteq V_{\beta_1} \cup \cdots \cup V_{\beta_m}$. Por ende, C es una parte compacta de K . \square

► En el caso particular del espacio métrico \mathbb{R}^n (con la métrica euclidiana), hay un criterio de compacidad usualmente atribuido a Heine y Borel.³ Dícese que una parte A de un espacio métrico (X, ρ) es *acotada* si hay un punto $z \in A$ y un radio $R > 0$ tal que $A \subseteq \bar{B}(z; R)$. En el caso $X = \mathbb{R}^n$, se puede encajar la bola cerrada $\bar{B}(z; R)$ en un *rectángulo cerrado*:

$$\prod_{i=1}^n [z_i - R, z_i + R] \quad (\text{producto cartesiano de } n \text{ intervalos}),$$

y este rectángulo a su vez puede encajarse en una bola cerrada de mayor radio. Por lo tanto, una parte de \mathbb{R}^n es acotada si hay un rectángulo cerrado que lo incluye.

Teorema 2.30 (Heine y Borel). *Una parte $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacta si y solo si K es acotada y cerrada en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Ad (\Rightarrow): Sea K un conjunto compacto de \mathbb{R}^n . El Lema 2.29(a) muestra que K es cerrado.

³Eduard Heine mostró en 1872 que una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua (véase la demostración de la Proposición 1.40). Émile Borel mostró en 1895 que un cubrimiento abierto numerable del intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tiene un subcubrimiento finito, siguiendo el método de Heine. (Henri Lebesgue observó en 1898 que no hace falta que el cubrimiento original sea numerable.) Una vez establecida la compacidad para intervalos en \mathbb{R} , es fácil generalizarlo a rectángulos cerrados en \mathbb{R}^n .

Si $z \in K$ es un punto cualquiera,⁴ las bolas abiertas $\{B(z; m) : m \in \mathbb{N}^*\}$ cubren K porque $\bigcup_m B(z; m) = \mathbb{R}^n$. Luego hay índices $m_1 < m_2 < \cdots < m_R$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^R B(z; m_k) = B(z; m_R).$$

Esto dice que K es acotado en \mathbb{R}^n .

Ad(\Leftarrow): Sea K un conjunto acotado y cerrado en \mathbb{R}^n . Sea L un rectángulo cerrado que incluye K , así que K es una parte cerrada de L . Por el Lema 2.29(b), basta mostrar que L es compacto.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de un rectángulo cerrado $L = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Al bisecar cada intervalo de este producto cartesiano:

$$[a_i, b_i] = [a_i, \tfrac{1}{2}(a_i + b_i)] \cup [\tfrac{1}{2}(a_i + b_i), b_i],$$

se puede subdividir L en 2^n rectángulos cuyos interiores son disjuntos.

Si L no fuera compacto, ninguna unión finita $U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m}$ cubre L . Luego hay al menos uno de los rectángulos de la subdivisión, que se puede llamar L_1 , que tampoco está cubierta por una unión finita de miembros de \mathcal{U} . Al bisecar los lados de L_1 , se obtiene 2^n subintervalos de L_1 , al menos uno de los cuales – designado por L_2 – no está cubierta por una unión finita de miembros de \mathcal{U} . Al continuar con este proceso de bisección, se obtiene una cadena encajada de subrectángulos,

$$L \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_k \supset \cdots$$

en donde ningún L_k está cubierta por una unión finita de miembros de \mathcal{U} .

Las coordenadas i -ésimas de estos rectángulos forman una cadena de subintervalos cerrados finitos de \mathbb{R} ,

$$[a_i, b_i] \equiv [a_{i0}, b_{i0}] \supset [a_{i1}, b_{i1}] \supset \cdots \supset [a_{ik}, b_{ik}] \supset \cdots$$

con $\{a_{ik}\}_{k \in \mathbb{N}}$ creciente, $\{b_{ik}\}_{k \in \mathbb{N}}$ decreciente, y $b_{ik} - a_{ik} = (b_i - a_i)/2^k$. Al igual que en la demostración del Teorema 1.25, hay un número $z_i \in [a_i, b_i]$ tal que $\bigcap_{k=0}^{\infty} [a_{ik}, b_{ik}] = \{z_i\}$. El vector $z = (z_1, \dots, z_n) \in L$ entonces satisface

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} L_k = \{z\}.$$

⁴El caso trivial $K = \emptyset$ es compacto (si U es cualquier miembro de un cubrimiento \mathcal{U} , vale $\emptyset \subset U$), cerrado por definición, y acotado porque \emptyset es parte de cualquier bola.

Como $z \in L$, hay al menos un miembro $U_\beta \in \mathcal{U}$ tal que $z \in U_\beta$. Por ser U_β abierto, hay un radio $\varepsilon > 0$ tal que $B(z; \varepsilon) \subseteq U_\beta$. Tómese $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^k} \max_{i \leq i \leq n} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Entonces el rectángulo L_k , que contiene z , cabe dentro de la bola $B(z; \varepsilon)$. Pero esto implica que $L_k \subset U_\beta$, contrario a la hipótesis sobre L_k .

Se concluye que hay una unión finita de los U_α que cubren L , después de todo. Esto muestra que L es compacto. \square

En la demostración del teorema de Heine y Borel, se ha empleado el mismo proceso de bisección repetida que sirvió para el teorema de Bolzano y Weierstrass. De hecho, estos teoremas son equivalentes, a la luz del Teorema 2.26. Una manera alternativa de mostrar la segunda parte del Teorema 2.30 es adaptar el Teorema 1.25 directamente para mostrar que cualquier sucesión en un rectángulo cerrado acotado L posee una subsucesión convergente.

► La propiedad de compacidad en espacios métricos se conserva bajo la aplicación de funciones continuas. Dicho de otra manera, un aspecto importante de la continuidad de una función es su preservación de conjuntos compactos.

Proposición 2.31. Sea (X, ρ) y (Y, σ) dos espacios métricos y sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Si $K \subseteq X$ es compacto, su imagen $f(K) \subseteq Y$ es también compacta.

Demostración. Denótese $L = f(K)$. Si $\{y_n\}$ es una sucesión en L , hay puntos $x_n \in K$ tales que $f(x_n) = y_n$, para todo n . Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión en K ; como K es compacto, esta sucesión posee una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$, con $x_{n_k} \rightarrow x \in K$ cuando $k \rightarrow \infty$.

La continuidad de f implica que $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ en Y . Ahora $f(x) \in f(K) = L$, y $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \in L$. Se ha comprobado que la sucesión $\{y_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}$ con límite $f(x)$ en L ; lo cual dice que L es compacto. \square

Corolario 2.32. Si K es una parte compacta de un espacio métrico (X, ρ) y si $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces hay puntos $y, z \in K$ en donde f alcanza un mínimo absoluto (en y) y un máximo absoluto (en z); esto es, $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ para todo $x \in K$.

Demostración. La imagen $f(K)$ es compacto en \mathbb{R} . Por el Teorema 2.30, $f(K)$ es acotado y cerrado en \mathbb{R} . Por ser acotado, hay $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a = \inf f(K)$ y $b = \sup f(K)$. En particular, $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in K$.

Por la definición del supremo, hay puntos $x_n \in K$ tales que $0 \leq b - f(x_n) \leq 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Esto dice que b es un punto de adherencia del conjunto imagen $f(K)$. Como $f(K)$ es cerrado en \mathbb{R} , se obtiene $b \in f(K)$. Por lo tanto, existe $z \in K$ con $f(z) = b$. De igual manera, a es un punto de adherencia de $f(K)$, así que hay $y \in K$ tal que $f(y) = a$. \square

2.3 Espacios métricos completos

En un espacio métrico (X, ρ) , la métrica define una *topología*: esta es un juego de partes de X – que se llaman “conjuntos abiertos” – que contiene las partes triviales \emptyset y X y las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de sus miembros. Hay topologías que no provienen de métrica alguna; en un tal “espacio topológico” el concepto de parte compacta tiene perfecto sentido (cada cubrimiento por abiertos incluye un subcubrimiento finito). Por lo tanto, el concepto de compacidad no está limitado a los espacios métricos.

En cambio, el concepto de *completitud*, introducido a continuación, es intrínseco a la estructura métrica de (X, ρ) .

Definición 2.33. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, ρ) es una **sucesión de Cauchy** si, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq M \implies \rho(x_m - x_n) < \varepsilon.$$

Cualquier sucesión convergente es de Cauchy, por el argumento de la Proposición 1.29.

Dícese que (X, ρ) es un **espacio métrico completo** si cada sucesión de Cauchy en X converge a un límite en X . \diamond

Ejemplo 2.34. La recta real \mathbb{R} , con la métrica “usual” dado por $\rho(s, t) := |s - t|$, es completa, por la Proposición 1.29. La demostración de esa proposición también es aplicable al plano complejo \mathbb{C} con la métrica $\rho(z, w) := |z - w|$.

El espacio vectorial \mathbb{R}^n , con la métrica euclidiana $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, es completo, por la siguiente razón. Sea $\{\mathbf{x}_m\}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n ; con $\mathbf{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, la sucesión $\{x_{mi}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} . En efecto, sea dado $\varepsilon > 0$; existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $k, m \geq M \implies \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$. Entonces

$$|x_{ki} - x_{mi}| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon \quad \text{para todo } k, m \geq M.$$

Luego hay $z_i \in \mathbb{R}$ tal que $x_{mi} \rightarrow z_i$ cuando $m \rightarrow \infty$. En detalle: hay $N_i = N_i(\varepsilon/\sqrt{n}) \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N_i \implies |x_{mi} - z_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Sea $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $N := \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. Entonces

$$m \geq N \implies \|\mathbf{x}_m - \mathbf{z}\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_{mi} - z_i|^2 < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2 \implies \|\mathbf{x}_m - \mathbf{z}\| < \varepsilon.$$

Esto dice que $\mathbf{x}_m \rightarrow \mathbf{z}$ en \mathbb{R}^n cuando $m \rightarrow \infty$. \diamond

Todas las pruebas de completitud siguen el modelo del ejemplo anterior: dada una sucesión de Cauchy, primero se identifica un *candidato* para el límite, y luego se comprueba la convergencia a ese límite.

Ejemplo 2.35. Sea \mathcal{C} el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en \mathbb{R} y \mathcal{N} la totalidad de sucesiones nulas, introducidas en la Definición 1.30. En el conjunto cociente $\underline{\mathbb{R}} = \mathcal{C}/\mathcal{N}$ se ha introducido una función $\rho^\# : \underline{\mathbb{R}} \times \underline{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty)$ por la fórmula (1.7):

$$\rho^\#(\underline{a}, \underline{b}) := \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n|,$$

donde $\underline{a} = [\{a_n\}]$, $\underline{b} = [\{b_n\}]$. Esta función es obviamente simétrica y no negativa. Si $\rho^\#(\underline{a}, \underline{b}) = 0$, la sucesión $\{a_n - b_n\}$ pertenece a \mathcal{N} , así que $\underline{a} - \underline{b} = 0$ en $\underline{\mathbb{R}}$. En otras palabras, $\rho^\#(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ si y solo si $\underline{a} = \underline{b}$: la función $\rho^\#$ es positiva. Además, el Lema 1.31 muestra que $\rho^\#$ cumple la desigualdad triangular. En fin: $\rho^\#$ es una *métrica* sobre $\underline{\mathbb{R}}$.

Ahora la Proposición 1.32 dice, ni más ni menos, que $(\underline{\mathbb{R}}, \rho^\#)$ es un espacio métrico completo. En su demostración, a partir de una sucesión de Cauchy $\{\underline{a}^{(n)}\}$ en $\underline{\mathbb{R}}$, se fabricó un elemento especial $\underline{\ell} \in \underline{\mathbb{R}}$, y en seguida se demostró la convergencia $\underline{a}^{(n)} \rightarrow \underline{\ell}$. \diamond

Lema 2.36. (a) *Una parte completa C de un espacio métrico (X, ρ) es cerrada en X .*

(b) *Una parte cerrada de un espacio métrico completo es también completa.*

Demostración. Ad (a): Si $x \in \overline{C}$, entonces hay una sucesión $\{x_n\} \subset C$ tal que $x_n \rightarrow x$ en X . Entonces $\{x_n\}$ es también una sucesión de Cauchy en C así que hay $y \in C$ tal que $x_n \rightarrow y$. Luego $x = y$, así que $x \in C$. En fin, $\overline{C} = C$, lo cual dice que C es cerrado.

Ad (b): Si C es una parte cerrada de un espacio métrico completo (X, ρ) , cualquier sucesión de Cauchy en C tiene un límite en X . Este límite es necesariamente un punto adherente de C , luego pertenece a C por ser C cerrado. \square

El enunciado del lema anterior es muy parecido al del Lema 2.29 (aunque las demostraciones son diferentes). Esto no es una casualidad, por la siguiente razón.

Lema 2.37. *Un espacio métrico compacto es completo.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico compacto (C, ρ) . Entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión convergente $\{x_{n_k}\}$: existe $z \in C$ tal que $x_{n_k} \rightarrow z$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Sea dado $\varepsilon > 0$. Entonces hay $M \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq M \implies \rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. Existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K \geq M$ y $k \geq K \implies \rho(x_{n_k}, z) < \varepsilon/2$. Entonces

$$m \geq M \implies \rho(x_m, z) \leq \rho(x_m, x_{n_K}) + \rho(x_{n_K}, z) < \varepsilon.$$

Luego $\{x_n\}$ converge a z en C . Esto muestra que C es completo. \square

El inverso de este lema es obviamente falso: \mathbb{R} es completo pero no es compacto.

Hay una propiedad de espacios métricos que en cierta medida es complementaria a completitud y que marca la diferencia entre conjuntos compactos y conjuntos meramente completos.

Definición 2.38. Un espacio métrico (X, ρ) es **totalmente acotado** (o *precompacto*)⁵ si para $\varepsilon > 0$ dado, existe un juego finito de puntos $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^m B(x_j; \varepsilon)$.

En otras palabras, X es totalmente acotado si X tiene un cubrimiento finito por bolas de radio ε , cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. Obviamente, el número m de centros depende de ε . \diamond

Ejemplo 2.39. Un espacio métrico (X, ρ) se dice **acotado** si hay $z \in X$ y $r > 0$ tales que $\rho(x, z) < r$ para todo $x \in X$; esto es, hay una sola bola $B(z; r)$ que cubre todo X .

Considérese el espacio métrico (\mathbb{N}, σ) con la métrica discreta, $\sigma(m, n) = \llbracket m = n \rrbracket$. Entonces $\mathbb{N} = B(n; r)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $r > 1$. Luego (\mathbb{N}, σ) es acotado. Sin embargo, este espacio métrico no es totalmente acotado: si $0 < \varepsilon \leq 1$, ninguna unión finita $\bigcup B(n_i; \varepsilon)$ cubre todo \mathbb{N} .

En vista del lema que sigue, entonces, (\mathbb{N}, σ) es un ejemplo de un espacio métrico cerrado y acotado pero no compacto: el teorema de Heine y Borel se refiere a partes compactas de \mathbb{R}^n con la métrica usual. \diamond

Lema 2.40. *Un espacio métrico compacto es totalmente acotado.*

Demostración. Se demostrará la contrapositiva. Sea (X, ρ) un espacio métrico no totalmente acotado. Entonces hay algún $\varepsilon_1 > 0$ tal que ninguna unión finita de bolas de radio ε_1 cubre X .

Tómese $x_0 \in X$ arbitrariamente; tómese $x_1 \in X \setminus B(x_0; \varepsilon_1)$. Por inducción sobre n , se puede tomar $x_{n+1} \in X \setminus (\bigcup_{j=0}^n B(x_j; \varepsilon_1))$. De esta manera, se construye una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $\rho(x_m, x_n) \geq \varepsilon_1$ para todo $m \neq n$ en \mathbb{N} .

Esta sucesión no es de Cauchy; y cualquier subsucesión tampoco es de Cauchy. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión en X que no posee una subsucesión convergente; luego (X, ρ) no es compacto. \square

Lema 2.41. *Un espacio métrico es totalmente acotado si y solo si cada sucesión tiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico totalmente acotado (X, ρ) . Supóngase, sin perder generalidad, que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito (de lo contrario, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión constante, la cual es trivialmente de Cauchy). Escribáse $x_{n0} \equiv x_n$.

Como X es una unión finita de bolas de radio 1, hay al menos una bola $B(y_1; 1)$ que contiene infinitos elementos de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; sea $\{x_{n1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ la subsucesión de $\{x_{n0}\}$ con cada $x_{n1} \in B(y_1; 1)$.

Como X es una unión finita de bolas de radio $\frac{1}{2}$, hay al menos una bola $B(y_2; \frac{1}{2})$ que contiene infinitos elementos de $\{x_{n1} : n \in \mathbb{N}\}$; sea $\{x_{n2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ la subsucesión de $\{x_{n1}\}$ (y de rebote, de $\{x_{n0}\}$) con cada $x_{n2} \in B(y_2; \frac{1}{2})$.

⁵El término *precompacto* es el que usa Bourbaki: véase el libro de Dieudonné, entre otros.

Continuando así por inducción sobre k , la sucesión $\{x_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que queda en alguna bola $B(y_k, 1/k)$, tiene una subsucesión $\{x_{n,k+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ con infinitas entradas en alguna bola $B(y_{k+1}, 1/(k+1))$.

Ahora considérese la “subsucesión diagonal” $\{x_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la sucesión original $\{x_n\}$. Dada $\varepsilon > 0$, tómese $K \geq 1/\varepsilon$; entonces

$$m \geq k \geq K \implies \rho(x_{mm}, x_{kk}) < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

Esto dice que $\{x_{kk}\}$ es una subsucesión de Cauchy de $\{x_n\}$. □

El siguiente resultado es un análogo del teorema de Heine y Borel para los espacios métricos en general.

Proposición 2.42. *Un espacio métrico es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Si (X, ρ) es compacto, entonces es completo por el Lema 2.37 y es totalmente acotado por el Lema 2.40.

Inversamente, si (X, ρ) es completo y totalmente acotado, sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera en X . Esta sucesión posee una sucesión de Cauchy por el Lema 2.41, la cual converge pues (X, ρ) es completo. Entonces (X, ρ) es compacto, por el Teorema 2.26. □

► Los espacios métricos completos son de gran utilidad en el análisis matemático. Pero muchos espacios encontrados en la práctica son incompletos. Resulta que hay un procedimiento “canónico” para *completar* un espacio métrico dado, encajándolo en un espacio métrico como subespacio denso. (Se trata, como en el caso de \mathbb{R} , de agregar los límites que pueden faltar a todas las sucesiones de Cauchy.)

Definición 2.43. Sean (X, ρ) y (Y, σ) dos espacios métricos. Una **isometría** $i: X \rightarrow Y$ es una aplicación (si una existe) que conserva la métrica:

$$\sigma(i(x), i(x')) = \rho(x, x') \quad \text{para todo } x, x' \in X.$$

Una isometría es inyectiva: porque si $i(x) = i(x')$, entonces $\rho(x, x') = \sigma(i(x), i(x')) = 0$, por lo cual $x = x'$ en X . Fíjese que una isometría es también continua – con $\delta = \varepsilon$ en (2.2).

Si existe una isometría *biyectiva* $i: X \rightarrow Y$, entonces la aplicación inversa $j: Y \rightarrow X$ cumple $\rho(j(y), j(y')) = \sigma(y, y')$ para $y, y' \in Y$, así que j es otra isometría biyectiva. En tal caso, dícese que (X, ρ) y (Y, σ) son espacios métricos **isomorfos** (a veces, para énfasis, *isométricamente isomorfos*). ◇

El siguiente resultado dice que cualquier espacio métrico posee una *compleción*, esencialmente única.

Teorema 2.44. Sea (X, ρ) un espacio métrico cualquiera. Entonces:

- (a) existe un espacio métrico completo $(X^\#, \rho^\#)$ y una isometría $i: X \rightarrow X^\#$ tal que la imagen $i(X)$ es densa en $X^\#$;
- (b) si (X^b, ρ^b) es otro espacio métrico completo para el cual hay una isometría $j: X \rightarrow X^b$ con imagen densa $j(X) \subseteq X^b$, entonces hay una (única) isometría biyectiva $\theta: X^\# \rightarrow X^b$ tal que $\theta \circ i = j$;
- (c) si (X, ρ) ya es completo, entonces $(X^\#, \rho^\#)$ es isométricamente isomorfo a (X, ρ) .

Demostración. Ad (a): La construcción de $(X^\#, \rho^\#)$ es una adaptación de la construcción de Cantor de los números reales (véase la sección 1.3).

Sea \mathcal{C}_X el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X . Si $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}_X$, la desigualdad triangular para ρ implica que

$$\rho(x_m, y_m) \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_m),$$

para cada $m, n \in \mathbb{N}$, así que

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(y_n, y_m).$$

Esto implica que la sucesión numérica $\{\rho(x_n, y_n)\}$ es de Cauchy en \mathbb{R} ; por lo tanto, el siguiente límite existe:

$$\tilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \in [0, \infty).$$

Es obvio que $\tilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \tilde{\rho}(\{y_n\}, \{x_n\})$ y es fácil comprobar que

$$\tilde{\rho}(\{x_n\}, \{z_n\}) \leq \tilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\}) + \tilde{\rho}(\{y_n\}, \{z_n\}).$$

(Véase la demostración del Lema 1.31.) Entonces $\tilde{\rho}$ es una *semimétrica* sobre \mathcal{C}_X .

Al declarar que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, se obtiene una relación de equivalencia sobre \mathcal{C}_X . Sea $X^\# := \mathcal{C}_X / \sim$ el conjunto cociente. Al poner $\underline{x} := [\{x_n\}]$, $\underline{y} := [\{y_n\}]$, es fácil comprobar que la siguiente aplicación $\rho^\#: X^\# \times X^\# \rightarrow [0, \infty)$ está bien definida:

$$\rho^\#(\underline{x}, \underline{y}) := \tilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Nótese que $\rho^\#(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ si y solo si $\underline{x} = \underline{y}$. Entonces $\rho^\#$ es una métrica sobre $X^\#$.

Si $x \in X$, sea $i(x) \in X^\#$ la clase de equivalencia de la *sucesión constante* con cada $x_n = x$. Para $x, y \in X$, $\rho^\#(i(x), i(y))$ es el límite de la sucesión numérica constante de valor $\rho(x, y)$; brevemente, $\rho^\#(i(x), i(y)) = \rho(x, y)$. Luego, $i: X \rightarrow X^\#$ es una isometría.

Dado $\underline{x} \in X^\sharp$, sea $\{x_n\} \in \mathcal{C}_X$ un representante de \underline{x} , y considérese la sucesión $\{i(x_m)\}$ en X^\sharp . Para cada $\varepsilon > 0$ dado, sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq M$ implica $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Entonces

$$m \geq M \implies \rho^\sharp(i(x_m), \underline{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Esto dice que $i(x_m) \rightarrow \underline{x}$ en X^\sharp cuando $m \rightarrow \infty$. Por ende, cada $\underline{x} \in X^\sharp$ es un punto adherente de la parte $i(X)$; en otras palabras, $i(X)$ es denso en X^\sharp .

Para verificar que (X^\sharp, ρ^\sharp) es *completo*, se adapta la demostración de la Proposición 1.32. Dada una sucesión de Cauchy $\{\underline{x}^{(m)}\}$ en X^\sharp , para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $i(y_n) \in X$ tal que $\rho^\sharp(\underline{x}^{(n)}, i(y_n)) \leq 1/n$. La desigualdad

$$\rho(y_k, y_m) = \rho^\sharp(i(y_k), i(y_m)) \leq \rho^\sharp(i(y_k), \underline{x}^{(k)}) + \rho^\sharp(\underline{x}^{(k)}, \underline{x}^{(m)}) + \rho^\sharp(\underline{x}^{(m)}, i(y_m))$$

muestra que la sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy en X y define una clase de equivalencia $\underline{y} \in X^\sharp$. Del párrafo anterior se ve que $i(y_n) \rightarrow \underline{y}$ en X . Ahora la desigualdad

$$\rho^\sharp(\underline{x}^{(m)}, \underline{y}) \leq \rho^\sharp(\underline{x}^{(m)}, i(y_m)) + \rho^\sharp(i(y_m), \underline{y})$$

muestra que $\underline{x}^{(m)} \rightarrow \underline{y}$ en X^\sharp cuando $m \rightarrow \infty$.

Ad (b): Defínase $\theta: X^\sharp \rightarrow X^b$ sobre el dominio $i(X)$ inicialmente por $\theta(i(x)) := j(x)$ para $x \in X$. Esto garantiza la relación $\theta \circ i = j$. Ahora, si $x, y \in X$, entonces

$$\rho^b(\theta(i(x)), \theta(i(y))) = \rho^b(j(x), j(y)) = \rho(x, y) = \rho^\sharp(i(x), i(y)),$$

así que θ es isométrico (en particular, continua) sobre $i(X)$. Se extiende θ por continuidad a todo X^\sharp al poner $\theta(\underline{x}) := \lim_{m \rightarrow \infty} \theta(i(x_m)) = \lim_{m \rightarrow \infty} j(x_m)$ si $i(x_m) \rightarrow \underline{x}$ en X^\sharp . Fíjese que el segundo límite está definida porque $\{i(x_m)\}$ es convergente (luego, de Cauchy) en X^\sharp ; como i, j son isometrías, se ve que

$$\{i(x_m)\} \text{ de Cauchy en } X^\sharp \implies \{x_m\} \text{ de Cauchy en } X \implies \{j(x_m)\} \text{ de Cauchy en } X^b,$$

por lo tanto $\{j(x_m)\}$ converge porque X^b es completo, por hipótesis. Además, este límite está bien definido: si $i(y_k) \rightarrow \underline{x}$ en X^\sharp , entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} j(y_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} j(x_m)$ en X^b , como es fácil comprobar.

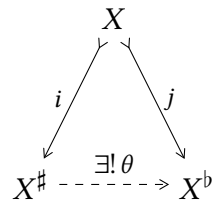
Nótese también que la imagen de θ consiste de todos los puntos adherentes de $j(X)$; es decir, θ es sobreyectiva y por ende biyectiva. La unicidad de θ es consecuencia de la condición $\theta \circ i = j$, pues así θ está determinada sobre una parte densa de X^\sharp ; y luego por continuidad sobre todo X^\sharp .

Ad (c): Si (X, ρ) es completo, se puede tomar $(X^b, \rho^b) = (X, \rho)$ en la parte (b), con $j = 1_X$, la función idéntica sobre X . La relación $\theta \circ i = 1_X$ muestra que las isometrías i y θ son inversas (en particular, i es biyectiva), así que $i: X \rightarrow X^\sharp$ es un isomorfismo. \square

Definición 2.45. La *compleción* de un espacio métrico (X, ρ) es el espacio métrico completo $(X^\#, \rho^\#)$ construido en la parte (a) del Teorema 2.44.

En vista de la parte (b), se puede identificar esta compleción⁶ con cualquier otro espacio métrico completo (X^b, ρ^b) en el cual (X, ρ) está encajado por una isometría con imagen densa. \diamond

El importe de la parte (b) del Teorema 2.44 es que la compleción de un espacio métrico es *canónica* o *natural*. Esto significa que si hay dos instancias concretas de compleción, las dos están ligadas por un *isomorfismo único*. A veces esta situación se representa por un diagrama conmutativa:



en donde la flecha quebrada significa la existencia (y unicidad) de la aplicación θ entre las dos instancias de una compleción.

2.4 Espacios métricos conexos

De modo informal, un conjunto se llamaría “conexo” si consiste de una sola pieza; o bien “disconexo” si está constituido por dos o más piezas. Pero es necesario aclarar el concepto de “pieza” para poder formalizar esa idea. En el contexto de espacios métricos – o de espacios topológicos más generales – por pieza se entiende una parte abierta y no vacía.

Definición 2.46. Una *desconexión* de un espacio métrico (X, ρ) es una unión disjunta $X = A \uplus B$ de dos *abiertos no vacíos* A y B . Como $A = X \setminus B$ y $B = X \setminus A$, las partes A y B también son cerrados.

Un espacio métrico (X, ρ) es **disconexo** si posee una desconexión.

Un espacio métrico (X, ρ) es **conexo** si no es disconexo. Dicho de otro modo, (X, ρ) es conexo si la única forma de expresar X como la unión disjunta de dos abiertos son las uniones triviales $X = X \uplus \emptyset = \emptyset \uplus X$.

Una parte $E \subset X$ es *conexa* si $(E, \rho|_E)$ es un espacio métrico conexo. Así, toda vez que $E = (E \cap A) \uplus (E \cap B)$ con A y B abiertos en X , es necesario que $E \subseteq A$ o bien $E \subseteq B$. \diamond

Obsérvese que un singulete $\{x\}$ es conexo en cualquier espacio métrico.

⁶Algunas personas dicen *completación*, un vocablo fuera de la normativa aceptada. Según el DRAE: *compleción*, acción o efecto de completar.

Ejemplo 2.47. Sea X un conjunto con al menos dos elementos y considérese la métrica discreta σ sobre X (Ejemplo 2.14). Cada singulete $\{x\} = B_\sigma(x; 1)$ es un abierto en X y por lo tanto *cualquier parte* $A \subseteq X$ es abierta (por ser una unión de singuletes). Además $X \setminus A$ es un abierto, así que A es también cerrado en (X, σ) .

Esto dice que cualquier descomposición no trivial $X = A \uplus (X \setminus A)$ es una desconexión de X . Es por eso que el espacio métrico (X, σ) merece el nombre de *discreto*. \diamond

Lema 2.48. (a) *Cualquier intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es conexo.*

(b) *Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es una parte no vacía y conexa, entonces E es un singulete o un intervalo.*

Demostración. Ad (a): Sea I un intervalo en \mathbb{R} . Si I fuera desconexo, habría un par de abiertos A, B en \mathbb{R} tales que $I \cap A \neq \emptyset$, $I \cap B \neq \emptyset$, e $I = (I \cap A) \uplus (I \cap B)$.

Tómese $s \in I \cap A$, $t \in I \cap B$ y supóngase (sin perder generalidad) que $s < t$.

Entonces $[s, t] \subseteq I$, por ser I un intervalo de \mathbb{R} . Sea $u := \sup([s, t] \cap A)$.

Si $u \in A$, entonces $u < t$; por ser A abierto en \mathbb{R} , habría $\delta > 0$ con $[u, u + \delta] \subseteq [s, t] \cap A$, lo cual contradice la definición de u . En cambio, si $u \in B$, entonces $u > s$; por ser B abierto en \mathbb{R} , habría $\delta > 0$ tal que $(u - \delta, u] \subseteq [s, t] \cap B$; esto tampoco es compatible con la definición de u como supremo de $[s, t] \cap A$.

Entonces no hay una tal desconexión de I ; luego I es conexo.

Ad (b): Sea $E \subset \mathbb{R}$ una parte conexa y supóngase que $s, t \in E$ con $s < t$. Tómese $v \in (s, t)$. Si fuera $v \notin E$, entonces $E = (E \cap (-\infty, v)) \uplus (E \cap (v, \infty))$ sería una desconexión de E , pues $s \in (-\infty, v)$ y $t \in (v, \infty)$.

Se concluye que $v \in E$ toda vez que $v \in (s, t)$; esto comprueba que $[s, t] \subset E$. En fin, E es una parte de \mathbb{R} con al menos dos puntos; y E es la unión de los subintervalos entre cada par de sus puntos. Luego E es un intervalo en \mathbb{R} . \square

Corolario 2.49. *El espacio euclidiano \mathbb{R}^n es conexo.*

Demostración. Si hubiera una desconexión $\mathbb{R}^n = A \uplus B$, tómese $\mathbf{x} \in A$ y $\mathbf{y} \in B$. Considérese el segmento de recta

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{ (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : 0 \leq t \leq 1 \},$$

y obsérvese que $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = ([\mathbf{x}, \mathbf{y}] \cap A) \uplus ([\mathbf{x}, \mathbf{y}] \cap B)$ es una desconexión del segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ la función biyectiva definida por $f(t) := (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Entonces

$$\rho(f(s), f(t)) = \|f(s) - f(t)\| = \|(s - t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = |s - t| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Como $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ y por ende $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > 0$, f es continua. Entonces

$$[0, 1] = ([0, 1] \cap f^{-1}(A)) \uplus ([0, 1] \cap f^{-1}(B))$$

es una desconexión de $[0, 1]$ porque $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos en $[0, 1]$, por la Proposición 2.21. Pero esto contradice el Lema 2.48(a). Se concluye que \mathbb{R}^n es conexo. \square

El argumento de la demostración anterior muestra que la conexidad está preservada por funciones continuas, como se verifica a continuación.

Lema 2.50. *Si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua entre dos espacios métricos y si E es una parte conexa de X , entonces $f(E)$ también es conexo.*

Demostración. Si $f(E)$ fuera desconexo, existiría una desconexión

$$f(E) = (f(E) \cap C) \uplus (f(E) \cap D)$$

con C y D abiertos en Y . Al tomar preimágenes bajo f , se obtendría

$$E = (E \cap f^{-1}(C)) \uplus (E \cap f^{-1}(D)),$$

donde $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son abiertos en X .

La ecuación $y = f(x)$ con $x \in E$, $y \in C$, tiene al menos una solución pues $f(E) \cap C \neq \emptyset$; en cuyo caso $x \in E \cap f^{-1}(C)$. Luego $E \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$; de igual modo $E \cap f^{-1}(D) \neq \emptyset$. Así, E tendría una desconexión, contrario a hipótesis. Se concluye que $f(E)$ es conexo. \square

Hay un criterio sencillo pero importante que permite establecer la conexidad (o no) de un espacio métrico dado.

Proposición 2.51. *Un espacio métrico (X, ρ) es desconexo si y solo si existe una función continua sobreyectiva $f: X \rightarrow \{0, 1\}$.*

Demostración. Fíjese que la métrica sobre $\{0, 1\}$ inducida por la inclusión $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ es discreta: porque $\{0, 1\} \cap (-1, 1) = \{0\}$ y $\{0, 1\} \cap (0, 2) = \{1\}$.

Si existe $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ continua y sobreyectiva, entonces $f^{-1}(0) \equiv f^{-1}(\{0\})$ es abierto y cerrado en X , y por lo tanto $X = f^{-1}(0) \uplus f^{-1}(1)$ es una desconexión de X .

Por otro lado, si X tiene una desconexión $X = A \uplus B$, defínase una función sobreyectiva $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ por $f(x) := 0$ si $x \in A$, $f(x) := 1$ si $x \in B$. Entonces f es continua, por la Proposición 2.21. En efecto, el espacio métrico $\{0, 1\}$ posee cuatro abiertos \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$, cuyas preimágenes respectivas \emptyset , A , B y X son abiertos en X . \square

Lema 2.52. *Si $\{E_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia de partes conexas de un espacio métrico (X, ρ) y si $\bigcap_{\alpha \in J} E_\alpha \neq \emptyset$, entonces la unión $E := \bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha$ es conexa.*

Demostración. Tómese $x \in \bigcap_{\alpha \in J} E_\alpha$. Si hubiera una desconexión $E = (E \cap A) \uplus (E \cap B)$ con A y B abiertos en X , entonces $x \in A$ o bien $x \in B$; sin perder generalidad, se puede suponer que $x \in A$.

Como $E \cap B \neq \emptyset$, se ve que $E_\beta \cap B \neq \emptyset$ para algún $\beta \in J$. Por otro lado, se nota que $x \in E_\beta \cap A$. Pero entonces la descomposición $E_\beta = (E_\beta \cap A) \uplus (E_\beta \cap B)$ no sería trivial –ninguna de las dos partes al lado derecho sería vacía– negando así la conexidad de E_β . Por lo tanto, E es conexo. \square

Una variante del concepto de conexidad, quizá más intuitiva y ciertamente más ligada a los temas de análisis, es la siguiente.

Definición 2.53. Un **camino** entre dos puntos x, y en un espacio métrico (X, ρ) es la imagen de una función continua $f: [a, b] \rightarrow X$ cuyo dominio es un intervalo compacto⁷ en \mathbb{R} tal que $f(a) = x$, $f(b) = y$.

Dícese que (X, ρ) es **conexo por caminos** si hay un camino entre dos puntos distintos cualesquiera de X . \diamond

Lema 2.54. *Un espacio métrico conexo por caminos es conexo.*

Demostración. Si (X, ρ) es conexo por caminos, tómese un punto cualquiera $x \in X$. Para todo $y \neq x$, hay una función continua $f_y: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f_y(0) = x$, $f_y(1) = y$.

Por los Lemas 2.48 y 2.50, cada camino $f_y([0, 1])$ es conexo. Estos caminos tienen x como un punto inicial común. Su unión es X , porque

$$X = \{x\} \cup \bigcup_{y \neq x} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \neq x} f_y([0, 1]) \subseteq X.$$

El Lema 2.52 entonces muestra que X es conexo. \square

⁷Si es necesario, siempre puede suponerse que $[a, b] = [0, 1]$.

3 Espacios normados y espacios de funciones

El concepto de espacio métrico es muy útil, pero para efectos de análisis es insuficiente: para poder plantear e investigar la convergencia de *series* en un contexto amplio, hace falta disponer de una operación de suma. Se requiere, pues, combinar una estructura métrica con las operaciones algebraicas de un espacio vectorial (real o complejo). En un tal espacio vectorial, las métricas interesantes son aquellas que provienen de *normas*.

3.1 Normas

En adelante, las letras E, F generalmente denotarán un espacio vectorial sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} , según el contexto; la opción por defecto será \mathbb{C} . Sus vectores se denotarán por x, y, z , etc.; y los escalares serán escritos con letras griegas: $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \dots \in \mathbb{C}$.

Definición 3.1. Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{C} (un *espacio \mathbb{C} -vectorial*) [o bien sobre \mathbb{R} , *mutatis mutandis*]. Una **seminorma** en E es una función $p: E \rightarrow [0, \infty)$ tal que:

- (a) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}, x \in E$ (*homogeneidad*);
- (b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$ (*desigualdad triangular*).

Fíjese que $(x, y) \mapsto p(x - y)$ es una semimétrica sobre E .

Una **norma** en E es una función $E \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto \|x\|$ que satisface:

- (a) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}, x \in E$ (*homogeneidad*);
- (b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$ (*desigualdad triangular*);
- (c) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$ en E (*positividad*).

La fórmula $\rho(x, y) := \|x - y\|$ define una métrica sobre E . Para describir la topología de E , basta considerar las **bolas unitarias** (abierta y cerrada) con centro $0 \in E$ y radio 1:

$$B(0; 1) := \{x \in E : \|x\| < 1\}, \quad \overline{B}(0; 1) := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}. \quad \diamond$$

Lema 3.2. Una norma (o seminorma) sobre E es una función continua.

Demostración. Si $x \mapsto \|x\|$ es una norma sobre E , esta es una función $E \rightarrow [0, \infty)$. Para poder hablar de continuidad, se considera el dominio como el espacio métrico (E, ρ) donde $\rho(x, y) := \|x - y\|$. La convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ en E se define por

$$x_n \rightarrow x \text{ en } E \iff \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \iff \|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

La desigualdad triangular implica $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$, así que $x_n \rightarrow x$ en E implica $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ en $[0, \infty)$. \square

En los casos unidimensionales, $E = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , el valor absoluto $z \mapsto |z|$ es una norma, por el Lema 1.2. En \mathbb{R}^n , la Definición 2.3 introdujo la norma euclidiana $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$.

Ejemplo 3.3. El análogo del producto punto para vectores en \mathbb{C}^n es la “forma hermítica”

$$\langle w | z \rangle := \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2 + \cdots + \bar{w}_n z_n.$$

Defínase

$$\|z\| := \sqrt{\langle z | z \rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}. \quad (3.1)$$

No es difícil comprobar la desigualdad de Cauchy y Schwarz, análoga a la desigualdad de Cauchy para el producto punto en \mathbb{R}^n :

$$|\langle w | z \rangle| \leq \|w\| \|z\| \quad \text{para todo } w, z \in \mathbb{C}^n. \quad (3.2)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|z + w\|^2 &= \langle z + w | z + w \rangle = \langle z | z \rangle + \langle w | z \rangle + \langle z | w \rangle + \langle w | w \rangle \\ &= \|z\|^2 + 2 \Re \langle w | z \rangle + \|w\|^2 \leq \|z\|^2 + 2 \|w\| \|z\| + \|w\|^2 \end{aligned}$$

así que $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$. Además, $\|\alpha z\| = \sqrt{\bar{\alpha} \alpha} \sqrt{\langle z | z \rangle} = |\alpha| \|z\|$ para $\alpha \in \mathbb{C}$; y es obvio que $\|z\| = 0$ solo si $z = 0$. Se concluye que $z \mapsto \|z\|$ es una norma sobre \mathbb{C}^n . \diamond

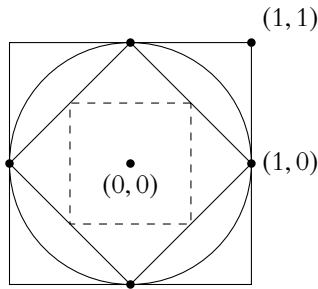


Figura 3.1: Comparación de varias bolas unitarias en \mathbb{R}^2

Definición 3.4. Es posible definir varias normas sobre \mathbb{C}^n , distintas de la norma (3.1). Por ejemplo, se puede definir

$$\|z\|_1 := |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|, \quad (3.3a)$$

$$\|z\|_\infty := \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|\}. \quad (3.3b)$$

Se verifica fácilmente que ¹

$$\|z\|_\infty \leq \|z\| \leq \|z\|_1 \leq n \|z\|_\infty \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^n. \quad (3.4)$$

Esto conlleva las inclusiones de bolas abiertas (véase la Figura 3.1):

$$B_\infty(x; r/n) \subset B_1(x; r) \subset B(x; r) \subset B_\infty(x; r),$$

así que los tres espacios normados $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ y $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ tienen los mismos abiertos; por lo tanto, las métricas subyacentes son equivalentes. \diamond

Hay un gran surtido de normas sobre \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , obtenidas de la siguiente desigualdad entre números no negativos.

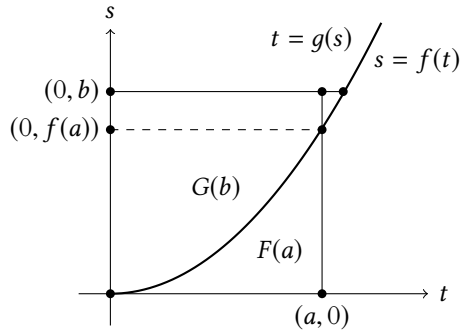


Figura 3.2: La desigualdad de Young

Lema 3.5 (Desigualdad de Young). Sea $p > 1$ y tómesese $q := p/(p-1)$, de modo que $1/p + 1/q = 1$. Entonces, para todo $a \geq 0$, $b \geq 0$, la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (3.5)$$

es válida, con igualdad si y solo si $a^p = b^q$.

Demostración. En primer lugar, nótese que

$$q = \frac{p}{p-1} \iff \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{p} = \frac{q-1}{q} \iff p = \frac{q}{q-1},$$

y por ende $1/(p-1) = q/p = q-1$.

¹Al considerar los vectores $z = (1, 0, \dots, 0)$ y $z = (1, 1, \dots, 1)$, se ve que las constantes en estas desigualdades son óptimas.

Considérese la función creciente $s = f(t) := t^{p-1}$ para $t \in [0, \infty)$, con función inversa $t = g(s) := s^{q-1}$. Además,

$$\int_0^a f(t) dt + \int_0^b g(s) ds = \int_0^a t^{p-1} dt + \int_0^b s^{q-1} ds = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ahora bien, dos funciones inversas estrictamente crecientes sobre $[0, \infty)$ pueden representarse con una sola curva en el primer cuadrante (véase la Figura 3.2). Las integrales citadas son las áreas debajo de $s = f(t)$ y a la izquierda de $t = g(s)$ para $t \in [0, a]$ y $s \in [0, b]$ respectivamente. Estas áreas incluyen el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$, de área ab , más un superávit que solo se anula cuando $f(a) = b$, o equivalentemente, $g(b) = a$.

Luego $ab \leq a^p/p + b^q/q$, con igualdad si y solo si $a^{p-1} = b$ y $b^{q-1} = a$, esto es, si y solo si $a^p = ab = b^q$. \square

Lema 3.6 (Desigualdad de Hölder). Si $w, z \in \mathbb{C}^n$ y si $p, q > 1$ con $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^n |\bar{w}_j z_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |w_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^q \right)^{1/q}. \quad (3.6)$$

Demostración. Conviene abreviar los términos al lado derecho al introducir las notaciones

$$\|w\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |w_j|^p \right)^{1/p}, \quad \|z\|_q := \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^q \right)^{1/q}. \quad (3.7)$$

Fíjese que $\|w\|_p = 0$ si y solo si $w = 0$ en \mathbb{C}^n . Se puede suponer que $w \neq 0$ y $z \neq 0$ en \mathbb{C}^n , porque de otro modo el resultado es trivial.

Escríbase $a_j := |w_j|/\|w\|_p$ y $b_j := |z_j|/\|z\|_q$ para $j = 1, \dots, n$. Al aplicar la desigualdad de Young (3.5) a cada par (a_j, b_j) , se obtiene

$$\sum_{j=1}^n \frac{|\bar{w}_j z_j|}{\|w\|_p \|z\|_q} = \sum_{j=1}^n a_j b_j \leq \sum_{j=1}^n \frac{|w_j|^p}{p \|w\|_p^p} + \sum_{j=1}^n \frac{|z_j|^q}{q \|z\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de donde el resultado es inmediato. \square

Obsérvese que el caso particular $p = q = 2$ de (3.6) es simplemente la desigualdad de Cauchy y Schwarz.

Lema 3.7 (Desigualdad de Minkowski). Si $x, y \in \mathbb{C}^n$ y si $p \geq 1$, entonces

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \quad (3.8)$$

En consecuencia, las fórmulas (3.7) definen normas sobre \mathbb{C}^n .

Demostración. El caso $p = 1$ sigue de $|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j|$ para cada j . Supóngase, entonces, que $p > 1$ y sea $q := p/(p - 1)$.

Sea $a_j := |x_j|$, $b_j := |y_j|$, así que

$$\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \leq \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^p = \sum_{j=1}^n a_j(a_j + b_j)^{p-1} + \sum_{j=1}^n b_j(a_j + b_j)^{p-1}.$$

Fíjese que $(a_j + b_j)^{(p-1)q} = (a_j + b_j)^p$. Al aplicar la desigualdad de Hölder (3.6) a cada una de las dos sumatorias al lado derecho, se obtiene

$$\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^p \leq (\|a\|_p + \|b\|_p) \left(\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^p \right)^{1/q},$$

y como $1 - 1/q = 1/p$, se obtiene

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)^p \right)^{1/p} \leq \|a\|_p + \|b\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p. \quad \square$$

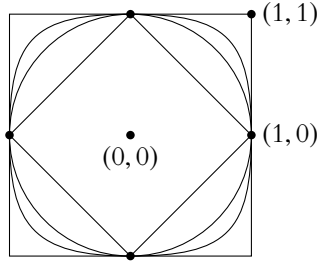


Figura 3.3: Bolas unitarias $\|x\|_p \leq 1$ en \mathbb{R}^2 , para $p = 1, 2, 3, \infty$

De este modo se ha obtenido una familia de normas $\|\cdot\|_p$ sobre \mathbb{C}^n , para $1 \leq p < \infty$.

Es evidente que $\sum_{j=1}^n |x_j|^p \geq \max_j |x_j|^p = \|x\|_\infty^p$, así que $\|x\|_p \geq \|x\|_\infty$ para cada $p \geq 1$. Para cada $x \in \mathbb{C}^n$ fijo, resulta que la función $f(p) := \|x\|_p$ es decreciente sobre $[1, \infty)$ y que $\lim_{p \rightarrow \infty} f(p) = \|x\|_\infty$. [Se dejan estas propiedades como un ejercicio.] La Figura 3.3 muestra las bolas unitarias en \mathbb{R}^2 para algunos valores de p .

Esto motiva la designación de la norma (3.3b) con el símbolo $\|\cdot\|_\infty$; en adelante se puede hablar de $\|x\|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$.

► La desigualdad de Minkowski admite generalizaciones a series o integrales, dando lugar a diversos espacios normados de dimensión infinita.

Definición 3.8. Para $p \in [1, \infty)$, sea ℓ^p el conjunto de sucesiones $x = \{x_k\}$ en \mathbb{C} tales que la serie positiva $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^p$ converge absolutamente. Defínase

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{para } x \in \ell^p. \quad (3.9)$$

Sea ℓ^∞ el conjunto de *sucesiones acotadas* $x = \{x_k\}$ en \mathbb{C} . Defínase

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \quad \text{para } x \in \ell^\infty. \quad \diamond$$

Ejemplo 3.9. Se debe comprobar que cada ℓ^p , para $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio \mathbb{C} -vectorial normado, en donde $\|\cdot\|_p$ es una norma.

Es obvio que ℓ^∞ es un espacio vectorial complejo y es fácil comprobar que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma. Supóngase, entonces, $1 \leq p < \infty$ y tómesese $x, y \in \ell^p$.

Es evidente que $\|x\|_p \geq 0$, con igualdad si y solo si $x = 0$ en ℓ^p . Además $\alpha x = \{\alpha x_k\} \in \ell^p$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, con $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p$.

Considérese las sumas parciales

$$s_n := \sum_{k=0}^n |x_k|^p, \quad t_n := \sum_{k=0}^n |y_k|^p, \quad u_n := \sum_{k=0}^n |x_k + y_k|^p.$$

La desigualdad de Minkowski en \mathbb{C}^n dice que

$$u_n \leq (s_n^{1/p} + t_n^{1/p})^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p.$$

Luego la serie creciente acotada $\{u_n\}$ converge a una suma no mayor que el lado derecho; eso dice que $x + y \in \ell^p$, con

$$\|x + y\|_p := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Se concluye (a) que ℓ^p es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , y la última desigualdad confirma que $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre ℓ^p . De hecho, esa última desigualdad no es otra cosa que la desigualdad de Minkowski (3.8) para series infinitas:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}. \quad \diamond$$

Ejemplo 3.10. Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto en \mathbb{R} . Considérese el espacio vectorial $C(I) \equiv C(I, \mathbb{C})$ de funciones continuas $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ (Definición 1.17). Conviene escribir

$$\|f\|_\infty \equiv \|f\|_I := \sup\{|f(t)| : t \in I\}.$$

Por la sección 1.4, se sabe que esta es una norma sobre $C(I)$, y que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ si y solo si $f_n(t) \rightarrow f(t)$ *uniformemente* sobre I . \diamond

Ejemplo 3.11. Sea I un intervalo en \mathbb{R} . Si I es compacto y si $1 \leq p < \infty$, entonces la función $t \mapsto |f(t)|^p$ es integrable sobre I , para todo $f \in C(I)$. Si I no es compacto (en particular, si $I = \mathbb{R}$), se debe considerar el subespacio

$$\mathcal{L}^p(I) := \left\{ f \in C(I) : \int_I |f(t)|^p dt < \infty \right\} \quad (3.10)$$

en donde se puede definir

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Evidentemente, $\mathcal{L}^p(I) = C(I)$ si y solo si I es un intervalo compacto.

En el caso $p = 1$, la desigualdad triangular

$$\int_I |f(t) + g(t)| dt \leq \int_I |f(t)| dt + \int_I |g(t)| dt$$

muestra que $\mathcal{L}^1(I)$ es un espacio normado, con norma $\|\cdot\|_1$.

Si $1 < p < \infty$ y $q = p/(p-1)$, tómese $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$ y $h \in \mathcal{L}^q(I)$. En vista de la desigualdad de Young,

$$|f(t)h(t)| \leq \frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|h(t)|^q}{q} \quad \text{para todo } t \in I,$$

es un ejercicio adaptar las demostraciones de los Lemas 3.6 y 3.7 para comprobar las desigualdades de Hölder:

$$\int_I |f(t)h(t)| dt \leq \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_I |h(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad (3.11)$$

y de Minkowski:

$$\left(\int_I |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_I |g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

La última relación puede abreviarse como $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ para $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$. Entonces $\mathcal{L}^p(I)$ es un espacio normado, para $p \in [1, \infty)$. \diamond

Nótese que la desigualdad de Hölder (3.11) para integrales tiene la interpretación siguiente: si $f \in \mathcal{L}^p(I)$ y $h \in \mathcal{L}^q(I)$, entonces $fh \in \mathcal{L}^1(I)$, con $\|fh\|_1 \leq \|f\|_p \|h\|_q$.

En el ejemplo anterior, cada integrando es una función *continua* y no negativa sobre I , por definición. Esto garantiza la existencia de las integrales (tal vez impropias) de

Riemann, que convergen en virtud de la condición (3.10). Además, la única función continua tal que $t \mapsto |f(t)|^p$ tenga integral nula es la función constante $f(t) \equiv 0$, así que $\|f\|_p = 0$ implica $f = 0$ en $\mathcal{L}^p(I)$.

Evidentemente, hay funciones discontinuas $h: I \rightarrow \mathbb{C}$ para las cuales $t \mapsto |h(t)|^p$ es integrable con integral finita; por ejemplo, se puede tomar $h(t_i) \neq 0$ solo para un número finito de valores $t_i \in I$; pero tales funciones tienen integrales nulas sin ser idénticamente cero. Para mantener la positividad de la norma, se debe descartar esas funciones.²

► Cada espacio normado es un espacio métrico con la métrica $\rho(x, y) := \|x - y\|$. En algunos casos, el espacio normado es *completo* en el sentido de la Definición 2.33. Cuando un espacio normado no es completo, es apropiado considerar su completación.

Definición 3.12. Un espacio de Banach es un espacio normado completo.³ ◇

Sea E un espacio normado no necesariamente completo. El espacio métrico (E, ρ) tiene una completación $(E^\#, \rho^\#)$ definida mediante el Teorema 2.44. Es un ejercicio verificar que la fórmula $\|\underline{x}\| := \rho^\#(\underline{0}, \underline{x})$ es una norma sobre $E^\#$ y que $\rho^\#(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$ para $\underline{x}, \underline{y} \in E^\#$. En consecuencia, $E^\#$ es un espacio de Banach con esta norma, en el cual E es un subespacio denso. (Para ser estrictamente correcto, hay un subespacio denso de $E^\#$ que es isométricamente isomorfo a E ; pero esto es una distinción sin diferencia.)

Proposición 3.13. Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto en \mathbb{R} . Entonces $C(I)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $C(I)$. Entonces, para cada $t \in I$, la desigualdad evidente

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty$$

implica que $\{f_n(t)\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} . Luego hay una función $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ para $t \in I$.

Sea dado $\varepsilon > 0$; tómese $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq M \implies \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$. Entonces

$$m, n \geq M \implies |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon \quad \text{para todo } t \in I.$$

Al dejar $n \rightarrow \infty$, con $m \geq M$ fijo, se concluye que

$$m \geq M \implies |f_m(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \text{para } t \in I. \quad (3.12)$$

²Otra opción sería tomar el cociente por un subespacio de funciones de integral nula. Sin embargo, a lo largo esto exige el uso de una integral con mejores propiedades de la de Riemann, a saber, la integral de Lebesgue; y así se hará en el curso siguiente.

³En su tesis doctoral de 1920, Banach introdujo los espacios normados completos en forma axiomática. En su libro: Stefan Banach, *Théorie des Opérations Linéaires* (Monografie Matematyczne, Warszawa, 1931), él los llamó modestamente *espacios de tipo B*, pero Fréchet los bautizó “espacios de Banach”.

En otras palabras, la convergencia $f_m \rightarrow f$ es *uniforme* sobre I . Por la Proposición 1.36, se concluye que $f \in C(I)$. La relación (3.12) ahora dice en forma más breve que

$$m \geq M(\varepsilon) \implies \|f_m - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

así que $f_m \rightarrow f$ en la norma de $C(I)$. Se ha establecido que cada sucesión de Cauchy en $C(I)$ es convergente. \square

En cambio, los espacios normados $\mathcal{L}^p([a, b])$ no son completos, para $1 \leq p < \infty$. El ejemplo siguiente trata del caso $p = 1$; con modificaciones apropiadas, el argumento es aplicable a los casos $p > 1$ también.

Ejemplo 3.14. Sea $J = [-1, 1]$. Defínase una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ en $C(J)$ por

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq t \leq 0, \\ nt & \text{si } 0 \leq t \leq 1/n, \\ 1 & \text{si } 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si $m > n \geq N$ en \mathbb{N}^* , nótese que

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_0^{1/m} (m-n)t \, dt + \int_{1/m}^{1/n} (1-nt) \, dt = \frac{m-n}{2m^2} + \frac{(m-n)^2}{2m^2n} \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{M}.$$

Esto implica que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(J) = (C(J), \|\cdot\|_1)$.

Nótese que la sucesión $\{f_n\}$ converge *puntualmente* a la función discontinua $f(t) := \llbracket 0 < t \leq 1 \rrbracket$. Además,

$$\int_{-1}^1 |f(t) - f_n(t)| \, dt = \int_0^{1/n} (1-nt) \, dt = \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Si hubiera una función $g \in C(J)$ tal que $f_n \rightarrow g$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$, resultaría entonces que $\int_{-1}^1 |g(t) - f(t)| \, dt = 0$. En particular, valdría

$$\int_{-1}^0 |g(t) - f(t)| \, dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_r^1 |g(t) - f(t)| \, dt = 0 \quad \text{para } 0 < r < 1.$$

Entonces la función continua $g(t)$ coincidiría con la función discontinua $f(t)$ salvo posiblemente en $t = 0$; lo cual es imposible. Por lo tanto, la sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ en $\mathcal{L}^1(J)$ no posee un límite en este espacio normado: en fin, $\mathcal{L}^1(J)$ no es completo. \diamond

Definición 3.15. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $p \in [1, \infty)$. El *espacio de Banach* $\underline{L^p(I)}$ se define como la *compleción* del espacio normado $\mathcal{L}^p(I)$. \diamond

Muchos elementos de la completación $L^p(I)$ que no pertenecen al subespacio $\mathcal{L}^p(I)$ pueden representarse por funciones discontinuas; por ejemplo, la función $f(t) := \llbracket 0 < t \leq 1 \rrbracket$ del Ejemplo 3.14 cumple $\int_{-1}^1 |f(t)| dt < \infty$ y así representa el elemento de $L^1([-1, 1])$ que es el límite de $\{f_n\}$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$. Sin embargo, la función $h(t) := \llbracket 0 \leq t < 1 \rrbracket$ también cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |h(t) - f_n(t)| dt = 0$ y debe representar *el mismo elemento* de $L^1([-1, 1])$.

En efecto, f y h solo difieren en $t = 0$ y $t = 1$, así que $\int_{-1}^1 |h(t) - f(t)| dt = 0$. En el espacio vectorial de funciones R -integrables $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f(t)| dt$ es finita, esta cantidad es solo una *seminorma*: para llegar a un espacio de Banach, habrá que cocientar por el subespacio donde $\|f\|_1 = 0$. Obsérvese que *en cada clase de equivalencia hay a lo sumo una función continua*, así que la restricción a $\mathcal{L}^1([-1, 1])$ es una norma.

Desdichosamente, algunos elementos de la completación no pueden ser representadas por funciones integrables en el sentido de Riemann. Es por eso que la llamada integral de Lebesgue, que admite más funciones de valor absoluta integrable,⁴ es más apropiado para discutir ciertos aspectos de estos espacios de Banach. Por lo tanto, en este curso es mejor tratar las completaciones de modo abstracto.

Definición 3.16. Sea E un espacio vectorial (real o complejo). Dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\!\|\!\cdot\!\|$ sobre E son **normas equivalentes** si hay constantes m, M con $0 < m \leq M$ tales que

$$m \|x\| \leq \|\!\|x\!\| \leq M \|x\| \quad \text{para todo } x \in E. \quad (3.13)$$

Nótese que tales desigualdades definen una relación de equivalencia (como su nombre indica) en la totalidad de normas sobre E . \diamond

Proposición 3.17. En un espacio vectorial E de dimensión finita (en particular, \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n), todas las normas son equivalentes.

Demostración. Es suficiente mostrar que una norma arbitraria $\|\!\|\!\cdot\!\|$ es equivalente a alguna norma específica. También, basta considerar espacios vectoriales *reales*.

Elíjase una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E . Hay un isomorfismo lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ dado por

$$t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto x = f(t) := t_1 e_1 + \dots + t_n e_n.$$

⁴La integral de Lebesgue es una “integral absoluta”, es decir, f es integrable sobre un intervalo I si y solo si $|f|$ tiene una integral finita sobre I . La integral de Riemann (ordinaria o impropia) sigue siendo útil en casos excluidos por esta condición: por ejemplo, $\int_0^\infty |(\sin t)/t| dt = +\infty$ pero $\int_0^\infty (\sin t)/t dt = \pi/2$ como integral de Riemann impropia.

Tómese como norma de referencia sobre \mathbb{R}^n la norma euclidiana $\|\cdot\|$ dada por (3.1). Entonces la desigualdad de Cauchy en \mathbb{R}^n establece que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{j=1}^n t_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n \|t_j e_j\| = \sum_{j=1}^n |t_j| \|e_j\| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |t_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2 \right)^{1/2} = M \|t\|, \end{aligned}$$

al tomar $M^2 := \sum_{j=1}^n \|e_j\|^2$.

Si $\rho(t, s) := \|t - s\|$ y $\sigma(x, y) := \|x - y\|$, la desigualdad $\|x\| \leq M \|t\|$ implica que la preimagen de cualquier bola abierta $B_\sigma(x; r)$ en el espacio métrico (E, σ) incluye una bola abierta $B_\rho(t; r/M)$ en (\mathbb{R}^n, ρ) . Esto implica (por la Proposición 2.21) que la aplicación $f: t \mapsto x$ es continua.

Por el Teorema 2.30 de Heine y Borel, la esfera unitaria $\mathbb{S} = \{t \in \mathbb{R}^n : \|t\|^2 \leq 1\}$ es compacta. Habida cuenta de la continuidad de normas (Lema 3.2), la función escalar $t \mapsto \|f(t)\| = \|x\|$ es también continua. Por el Corolario 2.32, esta función alcanza un mínimo valor $m = \|f(s)\|$ en \mathbb{S} . Si fuera $m = 0$, sería $f(s) = 0$ en E , luego $s = 0$ en \mathbb{R}^n ; esto no ocurre porque $0 \notin \mathbb{S}$, así que $m > 0$.

Se ha comprobado que $\|f(t)\| \geq m$ cuando $\|t\| = 1$. Al reemplazar $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ por $t/\|t\|$, la homogeneidad de la norma $\|\cdot\|$ y la linealidad de f implican que

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|t\|} \right\| \|t\| = \left\| f\left(\frac{t}{\|t\|}\right) \right\| \|t\| \geq m \|t\|.$$

En resumen: se ha comprobado que $m \|t\| \leq \|x\| \leq M \|t\|$ para $x = f(t) \in E$.

Nótese que la fórmula $\|x\| := \|t\|$ define una norma particular sobre E (que depende de la base elegida). Con esta definición, se cumple la desigualdad (3.13). Esto dice que la norma arbitraria $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma especial $\|\cdot\|$ sobre E , que es todo lo que había que mostrar. \square

Corolario 3.18. *Un espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*

Demostración. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión n sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} , hay un isomorfismo lineal $\mathbb{R}^n \simeq E$ [respectivamente, $\mathbb{C}^n \simeq E$] dado por $t \mapsto f(t) = x$, definido en la demostración anterior, que cumple $m \|t\| \leq \|x\| \leq M \|t\|$.

Si $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy en E , la desigualdad $m \|t_j - t_k\| \leq \|x_j - x_k\|$ muestra que $\{t_k\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n [o \mathbb{C}^n], así que $t_k \rightarrow t \in \mathbb{R}^n$ [o \mathbb{C}^n]. Luego, la desigualdad $\|x_k - x\| \leq M \|t_k - t\|$ muestra que $\{x_k\}$ converge a $x = f(t)$ en E . \square

En espacios de dimensión infinita, la historia es otra. Sea \mathbf{c}_{00} el espacio vectorial de sucesiones en \mathbb{C} con un número finito de entradas distintos de 0. Este espacio tiene una base numerable $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$, donde e_k es la sucesión $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ con entrada 1 en el k -ésimo lugar y los demás entradas cero (su n -ésima entrada es $\llbracket n = k \rrbracket$). Nótese que \mathbf{c}_{00} es un subespacio de cada ℓ^p y por lo tanto todas las normas $x \mapsto \|x\|_p$ son normas distintas sobre \mathbf{c}_{00} . Es un ejercicio fácil comprobar que \mathbf{c}_{00} es un *subespacio denso* en ℓ^p , para $1 \leq p < \infty$.

Sin embargo, todas estas normas son *inequivalentes*: si hubiera $p \neq r$ en $[1, \infty)$ con $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_r$ equivalentes sobre \mathbf{c}_{00} , entonces las compleciones ℓ^p y ℓ^r serían espacios métricos equivalentes. Pero resulta que $\ell^p \subseteq \ell^r$ si $p < r$, y la conclusión sería que $\ell^p = \ell^r$. Se ve que esta conclusión es falsa al exhibir una sucesión en $\ell^r \setminus \ell^p$ cuando $p < r$.

3.2 Series en espacios de Banach

Definición 3.19. En un espacio normado E , la suma de una *serie infinita* es el límite (si existe) de la sucesión de sus sumas parciales:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k.$$

Esta serie **converge absolutamente** si la serie numérica cuyo término $\#k$ es $\|x_k\|$ converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \infty. \quad \diamond$$

Lema 3.20. En un espacio de Banach, una serie absolutamente convergente es efectivamente una serie convergente; y se verifica

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|. \quad (3.14)$$

Demostración. Si la suma al lado derecho de (3.14) es finito, sus sumas parciales convergen. En particular, estas sumas parciales forman una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} : para $\varepsilon > 0$ dado, existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq N \implies \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\| < \varepsilon$. La desigualdad triangular para la norma muestra que

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad m > n \geq M(\varepsilon).$$

Entonces las sumas parciales $z_n := \sum_{k=0}^n x_k$ forman una sucesión de Cauchy en E . Como E es completo, $\{z_n\}$ converge a un límite $z \in E$, es decir, la serie en converge en E y su suma es $z = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

Otra vez por la desigualdad triangular, se ve que

$$\|z_n\| = \left\| \sum_{k=0}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|.$$

Como $z_n \rightarrow z \in E$, la continuidad de la norma asegura que $\|z_n\| \rightarrow \|z\|$ en \mathbb{R} . Por ende,

$$\|z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|z_n\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|. \quad \square$$

Definición 3.21. Un álgebra (real o complejo) es un espacio vectorial A (sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} , respectivamente) con un *producto* $A \times A \rightarrow A : (x, y) \mapsto xy$, bilineal y asociativo. Dicha álgebra es *unital* si posee una identidad multiplicativa,⁵ generalmente denotado por 1.

Un *álgebra normada* es un espacio normado A , donde la norma obedece las siguientes propiedades extras:

(d) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ para todo $x, y \in A$ (*submultiplicatividad*).

(e) $\|1\| = 1$ si A es unital.

Si además el espacio normado A es completo, dícese que A es un *álgebra de Banach*. \diamond

Ejemplo 3.22. Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto, el espacio de Banach $C(I)$ es un álgebra de Banach. En efecto, si $f, g \in C(I)$, entonces

$$\|fg\|_{\infty} = \sup_{t \in I} |f(t)g(t)| = \sup_{t \in I} |f(t)| |g(t)| \leq \sup_{s, t \in I} |f(s)| |g(t)| = \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}.$$

La identidad multiplicativa es la función constante de valor 1; la relación $\|1\|_{\infty} = 1$ es inmediato. \diamond

Ejemplo 3.23. En el espacio de Banach ℓ^1 de sucesiones absolutamente sumables, hay una operación bilineal asociativa, la *convolución* de sucesiones $(x, y) \mapsto x * y$, definido por

$$(x * y)_k := x_0 y_k + x_1 y_{k-1} + \cdots + x_{k-1} y_1 + x_k y_0.$$

Al cambiar el orden de sumación (permisible pues la convergencia es absoluta), se ve que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(x * y)_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k |x_{k-i}| |y_i| = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |x_j| |y_i| = \sum_{i=0}^{\infty} \|x\|_1 |y_i| = \|x\|_1 \|y\|_1.$$

⁵Para evitar el caso trivial $A = \{0\}$, se exige que $1 \neq 0$ en un álgebra unital.

Este cálculo muestra que $x * y \in \ell^1$ toda vez que $x, y \in \ell^1$; y que la norma $\|\cdot\|_1$ es submultiplicativa:

$$\|x * y\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_1.$$

La identidad convolutiva es la sucesión $e_0 = (1, 0, 0, \dots)$, como es fácil comprobar; nótese que $\|e_0\|_1 = 1$. \diamond

Ejemplo 3.24. El álgebra de matrices cuadradas $M_n(\mathbb{C})$ es finitodimensional, luego todas sus normas son equivalentes; pero interesa más las normas que son submultiplicativas, con $\|1_n\| = 1$. Dos ejemplos son la *norma por sumas de filas* y la *norma por sumas de columnas*, definidas respectivamente por:

$$\|A\|_r := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_c := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Está claro que $\|1_n\|_r = \|1_n\|_c = 1$. Un cálculo fácil comprueba que $\|AB\|_r \leq \|A\|_r \|B\|_r$ y $\|AB\|_c \leq \|A\|_c \|B\|_c$ para todo $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. \diamond

En un álgebra normada unital A , interesa estimar la cantidad de elementos invertibles. Un elemento $x \in A$ es **invertible** si existe $y \in A$ con $xy = yx = 1$; se escribe $y = x^{-1}$. (Es de notar que si hay inversos unilaterales $y, z \in A$ con $xy = 1 = zx$, entonces $z = zxy = y$.) En un álgebra *de Banach*, resulta que hay un vecindario de la identidad 1 que consiste de elementos inversible, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.25. *Sea A un álgebra de Banach unital. Si $x \in A$ cumple $\|1 - x\| < 1$, entonces x es invertible en A .*

Demostración. Tómese $x \in A$ con $\|1 - x\| < 1$, es decir, $x \in B(1; 1)$. Considérese la siguiente serie geométrica en A :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - x)^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (1 - x)^k.$$

La submultiplicatividad de la norma muestra que $\|(1 - x)^k\| \leq \|1 - x\|^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la serie anterior converge absolutamente y los siguientes estimados se verifican:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} (1 - x)^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(1 - x)^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|1 - x\|^k = \frac{1}{1 - \|1 - x\|}.$$

En más detalle: la segunda de estas series está mayorizada por la tercera serie, la cual es una serie geométrica en \mathbb{R} con factor $r = \|1 - x\| < 1$; como tal, la tercera serie es convergente. Como resultado, la primera serie converge absolutamente y su norma está mayorizada por la segunda, debido al Lema 3.20.

Sea $y := \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k$. Nótese que la premultiplicación $z \mapsto (1-x)z$ es una aplicación continua de A en A , y por ende conmuta con sumatorias:

$$y - xy = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^{k+1} = y - 1,$$

así que $xy = 1$. De igual forma $y - yx = y(1-x) = y - 1$, por lo tanto $yx = 1$. En fin, x es invertible con $x^{-1} = y$: se ha *construido* x^{-1} mediante una serie convergente. \square

Corolario 3.26. *En un álgebra de Banach unital A , el grupo A^\times de elementos invertibles es abierto en A .*

Demostración. Si $x \in A$ es invertible, sea $r := 1/\|x^{-1}\|$.

Si $z \in B(x, r)$, de modo que $\|x - z\| < r$, sea $u := zx^{-1}$. entonces

$$\|1 - u\| = \|(x - z)x^{-1}\| \leq \|x - z\| \|x^{-1}\| < r \|x^{-1}\| = 1.$$

La Proposición 3.25 muestra que u es invertible. Entonces $zx^{-1}u^{-1} = uu^{-1} = 1$, así que z tiene un inverso a la derecha, $x^{-1}u^{-1}$.

De igual manera, si $v := x^{-1}z$, entonces $\|1 - v\| = \|x^{-1}(x - z)\| \leq \|x^{-1}\| \|x - z\| < 1$; por lo tanto, v es invertible y $v^{-1}x^{-1}z = v^{-1}v = 1$, así que z tiene un inverso a la izquierda, $v^{-1}x^{-1}$.

La conclusión es que cada elemento $z \in B(x; r)$ es invertible; es decir, $B(x; r) \subseteq A^\times$. Entonces A^\times es un vecindario de cada uno de sus puntos, o sea, es un abierto en A . \square

Se sabe, por ejemplo, que el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices reales invertibles es abierto en el álgebra $M_n(\mathbb{R})$; y de igual manera, el grupo $GL(n, \mathbb{C})$ es abierto en el álgebra $M_n(\mathbb{C})$.

3.3 Aplicaciones y formas lineales continuas

De ahora en adelante, se adopta la costumbre, muy común en álgebra lineal, de escribir $Tx \equiv T(x)$ cuando T es lineal.

Lema 3.27. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ dos espacios normados, y sea $T: E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) T es continua en todo punto de E ;
- (b) T es continua en el origen $0 \in E$;
- (c) hay una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq M \|x\| \quad \text{para todo } x \in E. \quad (3.15)$$

Demostración. Ad (a) \iff (b): Si $x \in E$, la traslación $\tau_x: E \rightarrow E : y \mapsto y - x$ es una isometría biyectiva de E en E , porque

$$\|\tau_x(y) - \tau_x(z)\| = \|(y - x) - (z - x)\| = \|y - z\|.$$

Obsérvese que

$$(\tau_{-Tx} \circ T \circ \tau_x)(y) = (\tau_{-Tx} \circ T)(y - x) = \tau_{-Tx}(Ty - Tx) = Ty \quad \text{si } y \in E,$$

así que $\tau_{-Tx} \circ T \circ \tau_x = T$ para cada $x \in E$. Como estas traslaciones son homeomorfismos de E y de F , se ve que T es continua en x si y sólo si T es continua en 0.

Ad (b) \implies (c): Fíjese que $T(0) = 0$ en F por la linealidad de T . Sea dado $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de T en 0, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x \in E \text{ con } \|x\| < \delta \implies \|Tx\| < \varepsilon \text{ en } F.$$

En consecuencia, para cada $z \in E$,

$$\|z\| < r \implies \|(\delta/r)z\| < \delta \implies \|T((\delta/r)z)\| < \varepsilon \implies \|Tz\| < \frac{r\varepsilon}{\delta},$$

así que $\|Tz\| \leq (\varepsilon/\delta) \|z\|$. Luego $M := \varepsilon/\delta$ cumple (3.15).

Ad (c) \implies (b): Sea dado $\varepsilon > 0$ y tómese $\delta(\varepsilon) := \varepsilon/M$. Si $x \in E$ con $\|x\| < \delta$, entonces (3.15) implica que $\|Tx\| < M\delta = \varepsilon$. Esto comprueba la continuidad de T en 0. \square

Si $T: E \rightarrow F$ es una aplicación lineal y continua entre espacios normados, es natural tomar la constante *mínima* M que cumple (3.15).

Lema 3.28. Si $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ son dos espacios normados, se denota por $\mathcal{L}(E, F)$ la totalidad de las aplicaciones lineales y continuas $T: E \rightarrow F$. Las siguientes tres expresiones coinciden:

$$\|T\| := \inf \{ M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in E \} \quad (3.16a)$$

$$= \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E \text{ con } x \neq 0 \right\} \quad (3.16b)$$

$$= \sup \{ \|Tx\| : x \in E \text{ con } \|x\| \leq 1 \}. \quad (3.16c)$$

Fíjese que en el lado derecho de (3.16a) se puede tomar $M = \|T\|$; por lo tanto, vale

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \quad \text{para todo } x \in E. \quad (3.17)$$

Entonces $T \mapsto \|T\|$ es una norma sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}(E, F)$.

Demostración. Una aplicación lineal $T: E \rightarrow F$ cumple $T(0) = 0$; luego $\|Tx\| \leq M \|x\|$ para todo x , como en (3.15), si y solo si $\|Tx\|/\|x\| \leq M$ para $x \neq 0$. Esto comprueba que las expresiones (3.16a) y (3.16b) son iguales.

Si $x \neq 0$ en E , sea $y := x/\|x\|$, así que $\|y\| = 1$. La linealidad de T implica que $\|Tx\|/\|x\| = \|(Tx)/\|x\|\| = \|Ty\|$; esto establece la igualdad de (3.16b) y (3.16c).

Para ver que $T \mapsto \|T\|$ es una norma, nótese primero que $M = 0$ en (3.15) solo es posible si $Tx = 0$ para todo $x \in E$, o sea, $T = 0$ en $\mathcal{L}(E, F)$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\|\alpha T\| = \sup\{\|\alpha(Tx)\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\alpha| \|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = |\alpha| \|T\|.$$

Para $S, T \in \mathcal{L}(E, F)$, la suma $S + T : x \mapsto Sx + Tx$ es lineal y continua, y satisface

$$\begin{aligned} \|S + T\| &= \sup\{\|Sx + Tx\| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|Sx\| + \|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|Sx\| + \|Ty\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} = \|S\| + \|T\|. \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 3.29. Si $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(F, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es también un espacio de Banach. Si $E = F$, entonces $\underline{\mathcal{L}}(E) \equiv \mathcal{L}(E, E)$ es un álgebra de Banach.

Demostración. Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$. La desigualdad triangular $|\|T_m\| - \|T_n\|| \leq \|T_m - T_n\|$ muestra que la sucesión numérica $\{\|T_n\|\}$ es de Cauchy en \mathbb{R} ; y por tanto está acotada, así que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

La desigualdad (3.17) implica que

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Luego, la sucesión de vectores $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en F (y por ende convergente) para cada $x \in E$. Denótese los límites por $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ en F . Es fácil chequear que la aplicación $T : x \mapsto Tx : E \rightarrow F$ es lineal. Además,

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \|x\|.$$

Por el Lema 3.28, la aplicación lineal T es continua, con $\|T\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$.

Falta comprobar que $T_n \rightarrow T$ en $\mathcal{L}(E, F)$. Sea dado $\varepsilon > 0$; existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N \implies \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} n > N \implies \|T_n - T\| &= \sup\{\|T_n x - Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T_n x - T_m x\| : \|x\| \leq 1, m > N\} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\varepsilon \|x\| : \|x\| \leq 1\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego $T_n \rightarrow T$ en la norma de $\mathcal{L}(E, F)$: cada sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$ es convergente.

En el caso $E = F$, sean $S, T \in \mathcal{L}(E)$. El *producto* (o composición) $ST : x \mapsto S(Tx)$ es lineal y continua, y su norma obedece

$$\begin{aligned}\|ST\| &= \sup\{\|S(Tx)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|S\| \|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \|S\| \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = \|S\| \|T\|.\end{aligned}$$

Luego $\mathcal{L}(E)$, con este producto, es un álgebra de Banach. \square

Definición 3.30. Sea E un espacio normado sobre \mathbb{C} . Una **forma lineal continua** sobre E es una aplicación lineal continua $f : E \rightarrow \mathbb{C}$. La totalidad de estas formas lineales continuas es un espacio *de Banach* $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$. Este se llama el **espacio dual** de E .

La evaluación de una forma lineal sobre un vector se denota por

$$\langle f, x \rangle \equiv f(x) \in \mathbb{C}, \quad \text{cuando } f \in E^*, x \in E. \quad (3.18)$$

La aplicación $(f, x) \mapsto \langle f, x \rangle : E^* \times E \rightarrow \mathbb{C}$ es una *forma bilineal*⁶ sobre $E^* \times E$, llamada la **dualidad** entre E^* y E .

A veces conviene considerar el **bidual** $E^{**} := (E^*)^* = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{C})$. Si $\omega \in E^{**}$, se escribirá $\langle f, \omega \rangle := \omega(f)$ para denotar la dualidad entre E^* y E^{**} . \diamond

¶ Para un espacio normado E sobre \mathbb{R} , se define análogamente $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, el cual es un espacio de Banach real. Toda la terminología anterior se transfiere al caso real, *mutatis mutandis*. Para no duplicar esfuerzos, conviene seguir con escalares complejos hasta que se diga lo contrario. ¶

En el caso finitodimensional $E \simeq \mathbb{C}^n$, se sabe que cada base vectorial $\{x_1, \dots, x_n\}$ de E da lugar a una *base dual* $\{f_1, \dots, f_n\}$ de E^* , determinado por la fórmula

$$\langle f_i, x_j \rangle := \llbracket i = j \rrbracket, \quad \text{para } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

De esta manera, $E^* \simeq \mathbb{C}^n$ también, aunque este isomorfismo depende de la elección de las bases. Al iterar esta construcción, se obtiene una base $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ de E^{**} , determinado por $\langle f_i, \omega_j \rangle := \llbracket i = j \rrbracket$. Fíjese que la correspondencia $x_j \mapsto \omega_j$ entre bases se extiende a un isomorfismo lineal $E \rightarrow E^{**}$. Resulta que este último isomorfismo es *canónico*, es decir, no depende de la elección de bases.

Sin embargo, en dimensión infinita, estos argumentos no son aplicables, porque el uso de espacios vectoriales es problemático. Por ejemplo, si E es un espacio normado incompleto, como $\mathcal{C}^1([0, 1])$ por ejemplo, los espacios dual y bidual E^* y E^{**} son de Banach, por la Proposición 3.29; en particular, $E \neq E^{**}$. Por lo general, las normas en ejemplos concretos de E y E^* no se parecen mucho.

⁶No se debe confundir la forma *bilineal* $\langle f, x \rangle$ con la forma *sesquilineal* $\langle w | z \rangle$ que define el producto escalar en \mathbb{C}^n , introducido en el Ejemplo 3.3. Más adelante, en el contexto de los espacios de Hilbert, se explicará la relación entre estas dos notaciones.

Ejemplo 3.31. Sea \mathbf{c}_0 el espacio vectorial de sucesiones $x = \{x_k\}$ en \mathbb{C} tales que $x_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Bajo la norma $\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$, este es un espacio normado. Es fácil comprobar que es completo en esta norma, así que \mathbf{c}_0 es un espacio de Banach.

Al principio de la sección 1.3, se notó que una sucesión convergente es acotada; luego \mathbf{c}_0 es un subespacio de ℓ^∞ – y se debe notar que la norma del supremo es la misma en ambos espacios: \mathbf{c}_0 es un *subespacio normado* de ℓ^∞ . Por el Lema 2.36(a), se ve que \mathbf{c}_0 es un subespacio *cerrado*, pero propio, de ℓ^∞ . (En consecuencia, \mathbf{c}_0 no es denso en ℓ^∞ .)

Hay una aplicación bilineal $\ell^1 \times \mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle y, x \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_k \quad \text{para } y \in \ell^1, x \in \mathbf{c}_0. \quad (3.19)$$

Esta serie es absolutamente convergente en \mathbb{C} ; en efecto, vale

$$|\langle y, x \rangle| := \left| \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |y_k x_k| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \sum_{k=0}^{\infty} |y_k| = \|y\|_1 \|x\|_\infty.$$

Por (3.17), esta estimación dice que la forma lineal $f_y: x \mapsto \langle y, x \rangle$ es continua sobre \mathbf{c}_0 , y además que $\|f_y\| \leq \|y\|_1$.

Esta última desigualdad es una igualdad. Para ver eso, defínase una sucesión $\{x^{(m)}\}$ en $\mathbf{c}_{00} \subset \mathbf{c}_0$ al tomar

$$x_k^{(m)} := \frac{|y_k|}{y_k} \mathbb{I}((y_k \neq 0) \wedge (k \leq m)).$$

Nótese que $|x_k^{(m)}| = 0$ o 1 ; y que $\|x^{(m)}\|_\infty = 1$ cuando $y_k \neq 0$ para algún $k \leq m$. Además, se calcula que

$$\langle y, x^{(m)} \rangle = \sum_{k=0}^m |y_k| \rightarrow \|y\|_1 \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty.$$

Si $y = 0$ en ℓ^1 , entonces $f_y = 0$ en \mathbf{c}_0^* . Si $y \neq 0$, entonces

$$\|f_y\| = \sup\{|\langle y, x \rangle| : \|x\|_\infty \leq 1\} \geq \sup\{|\langle y, x^{(m)} \rangle| : m \in \mathbb{N}\} = \|y\|_1.$$

En todo caso, $\|f_y\| = \|y\|_1$. Se ha comprobado que la correspondencia $y \mapsto f_y$ es una isometría de ℓ^1 en \mathbf{c}_0^* .

Esta correspondencia es sobreyectiva: porque si $f \in \mathbf{c}_0^*$, considérese los valores de f sobre la base estándar $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ de \mathbf{c}_{00} . Nótese que $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k$ con convergencia absoluta en \mathbf{c}_0 . Al definir $y_k := f(e_k)$ para $k \in \mathbb{N}$, la continuidad y linealidad de f aseguran

$$f(x) = f\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k e_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k.$$

La serie al lado derecho converge absolutamente, porque con las notaciones anteriores $f(x^{(m)}) = \sum_{k=0}^m |y_k|$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\sup_{m \in \mathbb{N}} f(x^{(m)}) \leq \|f\|$ ya que $\|x^{(m)}\|_\infty \leq 1$. Esto verifica que $y \in \ell^1$ y que $f(x) = \langle y, x \rangle$ para todo $x \in c_0^*$.

En resumen: la correspondencia $y \mapsto f_y$ definido por (3.19) es un *isomorfismo isométrico* entre los espacios de Banach ℓ^1 y c_0^* . Brevemente, $c_0^* \simeq \ell^1$. \diamond

Ejemplo 3.32. Los cálculos del ejemplo anterior también son aplicables para identificar el espacio dual de ℓ^1 .

Hay una aplicación bilineal $\ell^1 \times \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle y, z \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} y_k z_k \quad \text{para } y \in \ell^1, x \in \ell^\infty.$$

Esta es la misma fórmula (3.19) de antes, con un cambio de papel de las dos sucesiones. La convergencia absoluta del lado derecho se mantiene:

$$|\langle y, z \rangle| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} y_k z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |y_k z_k| \leq \|y\|_1 \|z\|_\infty.$$

Ahora, la forma lineal $g_z: y \mapsto \langle y, z \rangle$ es continua sobre ℓ^1 , con $\|g_z\| \leq \|z\|_\infty$.

En este caso, se define $\{y^{(m)}\}$ en $c_{00} \subset \ell^1$ por

$$y_k^{(m)} := \frac{|z_k|}{z_k} \llbracket (z_k \neq 0) \wedge (k = m) \rrbracket.$$

Nótese que $\|y^{(m)}\|_1 = \llbracket z_m \neq 0 \rrbracket = 0$ o 1 . Además, $\langle y^{(m)}, z \rangle = |z_m| \llbracket z_m \neq 0 \rrbracket \leq \|z\|_\infty$. Entonces

$$\|g_z\| = \sup\{|\langle y, z \rangle| : \|y\|_1 \leq 1\} \geq \sup\{|\langle y^{(m)}, z \rangle| : m \in \mathbb{N}\} = \sup_{m \in \mathbb{N}} |z_m| \llbracket z_m \neq 0 \rrbracket = \|z\|_\infty.$$

Esta isometría $z \mapsto g_z$ de ℓ^∞ en $(\ell^1)^*$ es sobreyectiva. Porque si $g \in (\ell^1)^*$, al poner $z_k := g(e_k)$ para $k \in \mathbb{N}$, se obtiene $z \in \ell^\infty$ con $\|z\|_\infty \leq \|g\|$, tal que $g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z_k$ con convergencia absoluta para todo $y \in \ell^1$. Desde luego, también vale $|g(y)| \leq \|y\|_1 \|z\|_\infty$, así que $\|g\| \leq \|z\|_\infty$ y luego $\|g\| = \|z\|_\infty$. En resumen, se obtiene $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$. \diamond

Nótese que, a partir de los dos ejemplos anteriores, el bidual de c_0 es $c_0^{**} \simeq (\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$, el cual incluye c_0 como subespacio (cerrado) propio. También es de notar que las dualidades de estos dos espacios con ℓ^1 están dadas por la misma fórmula (3.19). En consecuencia, la inclusión $j: c_0 \hookrightarrow (c_0)^{**}$ es una isometría (no sobreyectiva). Este es un fenómeno general en espacios de Banach; hay una inclusión isométrica $J: E \hookrightarrow E^{**}$, pero hay que averiguar caso por caso si es un isomorfismo o no – dicese que E es *reflexivo* si $J(E) = E^{**}$.

Si $1 < p < \infty$, resulta que $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$ donde $q = p/(p-1)$, aprovechando la fórmula (3.19) una vez más. Como $p = q/(p-1)$, se concluye que $(\ell^p)^{**} \simeq \ell^p$, es decir, ℓ^p es reflexivo. Los detalles se dejan como un ejercicio.

► Hay un teorema que ilumina el estudio de espacios duales, porque implica la existencia de una cantidad suficiente de formas lineales continuas sobre cualquier espacio normado.

Si F es un subespacio de un espacio normado E , y si $h \in E^*$, es obvio que la restricción $h|_F: F \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación lineal, que cumple $|\langle h, x \rangle| \leq \|h\| \|x\|$ para $x \in E$ y también, obviamente, para $x \in F$. Esto dice que $h|_F \in F^*$, con $\|h|_F\| \leq \|h\|$.

En la dirección contraria, se puede preguntar si una forma lineal continua $g \in F^*$ posee una *extensión* a una forma lineal continua sobre todo el espacio E . Una extensión lineal es obviamente factible: una base vectorial de F puede completarse a una base vectorial de E , y es cuestión de definir la forma lineal extendida sobre los nuevos elementos de la base ampliada. Por esta vía, sin embargo, es difícil garantizar la continuidad de la extensión.

Resulta que sí es posible obtener esa continuidad, por una construcción debido a Helly, Hahn y Banach. Por esta sola vez, los casos real y complejo se separan. La noción de *convexidad* es el factor clave para obtener la extensión deseada.

Definición 3.33. Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} . Una parte $A \subseteq E$ es **convexa** si

$$x, y \in A \implies (1-t)x + ty \in A \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1.$$

Si A es convexa, una función $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función convexa** si para todo $x, y \in A$ vale

$$p((1-t)x + ty) \leq (1-t)p(x) + tp(y) \quad \text{cuando } 0 \leq t \leq 1. \quad (3.20)$$

Esta condición se cumple si y solo si el “hipergrafo” $\{(z, s) \in E \oplus \mathbb{R} : s \geq p(z)\}$ es un conjunto convexo en el espacio \mathbb{R} -vectorial $E \oplus \mathbb{R}$.⁷

Si E es un espacio normado, la función $p(x) := \|x\|$ es convexa. ◇

Lema 3.34 (Helly). Sea E un espacio \mathbb{R} -vectorial y $F \leq E$ un subespacio real. Sea $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $h: F \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal, tales que $h(y) \leq p(y)$ para todo $y \in F$. Entonces, si $y_1, y_2 \in F$; $x \in E \setminus F$; y $a, b > 0$, la desigualdad siguiente es válida:

$$\frac{h(y_1) - p(y_1 - bx)}{b} \leq \frac{p(y_2 + ax) - h(y_2)}{a}.$$

Demostración. Tómese $t := b/(a+b)$, de modo que $(1-t)b = ta$. Entonces

$$\begin{aligned} h((1-t)y_1 + ty_2) &\leq p((1-t)y_1 + ty_2) = p((1-t)(y_1 - bx) + t(y_2 + ax)) \\ &\leq (1-t)p(y_1 - bx) + tp(y_2 + ax) \end{aligned}$$

⁷El caso $E = \mathbb{R}$, una función $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solo si el segmento en \mathbb{R}^2 que une dos puntos del grafo de p es superior a la porción del grafo entre estos dos puntos.

por la hipótesis $h(y) \leq p(y)$ y la convexidad de p . Al multiplicar ambos lados por $(a + b)$ y usar la linealidad de h , se obtiene

$$a h(y_1) + b h(y_2) \leq a p(y_1 - bx) + b p(y_2 + ax),$$

esto es,

$$a(h(y_1) - p(y_1 - bx)) \leq b(p(y_2 + ax) - h(y_2)). \quad \square$$

El lema anterior es una preparación para el teorema siguiente, que extiende la forma lineal h a todo E en dos fases. Si F es de codimensión 1 en E , el lema es directamente aplicable. Si no, es necesario hacer una *inducción transfinita*, una dimensión a la vez. Esto requiere el *Lema de Zorn* de la teoría de conjuntos: *si \mathcal{S} es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada cadena (parte totalmente ordenada) tiene una cota superior, entonces \mathcal{S} posee un elemento maximal.*

Teorema 3.35 (Hahn y Banach, v1). *Sea E un espacio \mathbb{R} -vectorial y $F \leq E$ un subespacio real. Sea $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $h: F \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal, tales que*

$$h(y) \leq p(y) \quad \text{para todo } y \in F.$$

Entonces existe una forma lineal $\tilde{h}: E \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende h (esto es, $\tilde{h}|_F = h$) y también cumple

$$\tilde{h}(x) \leq p(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demostración. Tómesese $x \in E \setminus F$ arbitrario pero fijo, y considérese el subespacio

$$G := F + \mathbb{R}x = \{y + cx : y \in F, c \in \mathbb{R}\}.$$

Se debe comprobar que hay una extensión \hat{h} de h a G tal que $\hat{h}(z) \leq p(z)$ para todo $z \in G$. Basta hallar $s := \hat{h}(x) \in \mathbb{R}$. Los otros elementos de G son de la forma $y_2 + ax$ con $y_2 \in F$, $a > 0$; o bien $y_1 - bx$ con $y_1 \in F$, $b > 0$. Entonces la forma lineal $\hat{h}: G \rightarrow \mathbb{R}$ debe cumplir

$$\begin{aligned} \hat{h}(y_2 + ax) &= h(y_2) + as \leq p(y_2 + ax), \\ \hat{h}(y_1 - bx) &= h(y_1) - bs \leq p(y_1 - bx), \end{aligned}$$

para todo $y_1, y_2 \in F$ y todo $a, b > 0$. En otras palabras, el número real s debe satisfacer todas esta desigualdad:

$$\sup_{y_1 \in F, b > 0} \frac{h(y_1) - p(y_1 - bx)}{b} \leq s \leq \inf_{y_2 \in F, a > 0} \frac{p(y_2 + ax) - h(y_2)}{a}.$$

El Lema 3.34 muestra que esta desigualdad tiene al menos una solución s (y tal vez tiene un intervalo cerrado de soluciones). El teorema queda demostrado si $F + \mathbb{R}x = E$.

En el caso general, sea \mathcal{S} el conjunto de pares (G, \hat{h}) tales que $F \leq G \leq E$ y $\hat{h}: G \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal con $\hat{h}|_F = h$ y $\hat{h}(z) \leq p(z)$ para $z \in G$. Nótese que $(F, h) \in \mathcal{S}$ así que \mathcal{S} no es vacío.

Se define un orden parcial en \mathcal{S} por $(G_1, \hat{h}_1) \triangleleft (G_2, \hat{h}_2)$ si $G_1 \leq G_2$ y $\hat{h}_2|_{G_1} = \hat{h}_1$. Si $\{(G_\alpha, \hat{h}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ es una cadena en \mathcal{S} – de modo que los subespacios G_α estén encajados – sea $G := \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$, el cual es un subespacio de E porque los G_α están encajados, y defínase $\hat{h}: G \rightarrow \mathbb{R}$ por $\hat{h}(x) := \hat{h}_\alpha(x)$ toda vez que $x \in G_\alpha$. Entonces (G, \hat{h}) es una cota superior para la cadena.

El Lema de Zorn muestra que \mathcal{S} posee un elemento maximal (\tilde{G}, \tilde{h}) . Si fuera $\tilde{G} \neq E$, habría un vector $x \in E \setminus \tilde{G}$, y la construcción de arriba extendería \tilde{h} a $\tilde{G} + \mathbb{R}x$, siempre dominado por p . Pero eso sería contrario a la maximalidad de (\tilde{G}, \tilde{h}) ; por lo tanto, $\tilde{G} = E$ y se ha encontrado la deseada extensión \tilde{h} . \square

La versión compleja del teorema de Hahn y Banach requiere una hipótesis levemente distinta y una prueba diferente, porque el orden simple de \mathbb{R} no está disponible en \mathbb{C} . Resulta que hay un artificio que lo reduce al caso real. La función $p: E \rightarrow \mathbb{R}$, amén de ser convexa, debe ser **simétrica**, esto es, debe satisfacer

$$p(\lambda x) = p(x) \quad \text{para todo } x \in E, \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| = 1.$$

Teorema 3.36 (Hahn y Banach, v2). *Sea E un espacio \mathbb{C} -vectorial y $F \leq E$ un subespacio complejo. Sea $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y simétrica; y sea $h: F \rightarrow \mathbb{C}$ una forma \mathbb{C} -lineal, tal que*

$$|h(y)| \leq p(y) \quad \text{para todo } y \in F.$$

Entonces existe una forma \mathbb{C} -lineal $\tilde{h}: E \rightarrow \mathbb{C}$ que extiende h y también cumple

$$|\tilde{h}(x)| \leq p(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demostración. Sea $g(y) := \Re h(y)$ para $y \in F$. Entonces $g: F \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma \mathbb{R} -lineal. Habida cuenta de que

$$\Im h(y) = \Re(-i h(y)) = \Re h(-iy) = g(-iy)$$

porque h es \mathbb{C} -lineal, se obtiene la igualdad

$$h(y) = g(y) + i g(-iy) \quad \text{para } y \in F.$$

Fíjese que $g(y) = \Re h(y) \leq |h(y)| \leq p(y)$ para $y \in F$. Entonces el Teorema 3.35 produce una extensión \mathbb{R} -lineal $\tilde{g}: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g}|_F = g$ y $\tilde{g}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Además, se ve que $-\tilde{g}(x) = \tilde{g}(-x) \leq p(-x) = p(x)$, donde la última igualdad sigue de la simetría de p . Luego

$$|\tilde{g}(x)| \leq p(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Defínase $\tilde{h}(x) := \tilde{g}(x) + i\tilde{g}(-ix)$ para $x \in E$. Entonces $\tilde{h}: E \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{R} -lineal y además

$$\tilde{h}(ix) = \tilde{g}(ix) + i\tilde{g}(x) = -\tilde{g}(-ix) + i\tilde{g}(x) = i\tilde{h}(x),$$

lo cual muestra que $\tilde{h}: E \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal.

Si $x \in E$, tómese $\theta = \theta(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{h}(x) = e^{i\theta} |\tilde{h}(x)|$. Entonces se verifica

$$|\tilde{h}(x)| = e^{-i\theta} \tilde{h}(x) = \tilde{h}(e^{-i\theta} x) = \tilde{g}(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x).$$

(La igualdad $\tilde{h}(e^{-i\theta} x) = \tilde{g}(e^{-i\theta} x)$ es válida porque $\tilde{h}(e^{-i\theta} x) = |\tilde{h}(x)|$ es real.) Se ha mostrado que $|\tilde{h}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. \square

Teorema 3.37 (Hahn y Banach, v3). *Sea E un espacio normado real o complejo; y $F \leq E$ un subespacio. Si $h: F \rightarrow \mathbb{R}$ [o $h: F \rightarrow \mathbb{C}$] es una forma lineal continua, tal que*

$$|h(y)| \leq M \|y\| \quad \text{para todo } y \in F,$$

entonces existe una forma lineal continua $\tilde{h}: E \rightarrow \mathbb{R}$ [o $\tilde{h}: E \rightarrow \mathbb{C}$] que extiende h y también cumple

$$|\tilde{h}(x)| \leq M \|x\| \quad \text{para todo } x \in E.$$

En otras palabras: un elemento $h \in F^$ posee una extensión $\tilde{h} \in E^*$ tal que $\|\tilde{h}\| = \|h\|$.*

Demostración. Sea $p(x) := M \|x\|$ para $x \in E$; esta es una función convexa sobre E tal que $p(-x) = p(x)$. En el caso de escalares en \mathbb{C} , la función p es también simétrica. La conclusión sigue al aplicar el Teorema 3.35 en el caso real, o bien Teorema 3.36 en el caso complejo.

Nótese que la condición $|h(y)| \leq M \|y\|$ expresa la continuidad de la forma lineal h ; y se puede tomar $M = \|h\|$, usando la norma en F^* . Entonces $|\tilde{h}(x)| \leq \|h\| \|x\|$ para $x \in E$ dice que $\|\tilde{h}\| \leq \|h\|$. Como \tilde{h} extiende h , también es cierto que

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}\| &= \sup\{ |\tilde{h}(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1 \} \\ &\geq \sup\{ |h(y)| : y \in F, \|y\| \leq 1 \} = \|h\|, \end{aligned}$$

por lo tanto vale $\|\tilde{h}\| = \|h\|$. \square

Para explorar las consecuencias del teorema de Hahn y Banach, conviene volver al caso de escalares complejos. Los corolarios siguientes también son válidos en el caso real, como se podrá comprobar fácilmente.

Corolario 3.38. *Si E es un espacio normado, el espacio dual E^* es una colección de funciones continuas que separa puntos de E , esto es, si $x \neq y$ en E , existe $f \in E^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Demostración. Si $x, y \in E$ con $x \neq y$, sea $F := \mathbb{C}(x - y)$ el espacio vectorial unidimensional generado por el vector no nulo $x - y$. Defínase $h \in F^*$ por $h(t(x - y)) := t$. Su linealidad y continuidad son obvias; de hecho, $\|h\| = 1/\|x - y\|$.

Por el Teorema 3.37, existe $f = \tilde{h} \in E^*$ con $f(x) - f(y) = f(x - y) = h(x - y) = 1$. \square

Corolario 3.39. Si E es un espacio normado, entonces la norma de cualquier vector $x \in E$ está dada por

$$\|x\| = \sup\{|\langle f, x \rangle| : f \in E^*, \|f\| \leq 1\}. \quad (3.21)$$

Demostración. Si $x \in E$ y si $f \in E^*$ con $\|f\| \leq 1$, la desigualdad (3.17) proporciona la estimación $|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$.

Por otro lado, dado $x \in E$, la aplicación lineal $h_x: \mathbb{C}x \rightarrow \mathbb{C} : \alpha x \mapsto \alpha \|x\|$ es continua: la homogeneidad $|\langle h_x, \alpha x \rangle| = |\alpha| \|x\| = \|\alpha x\|$ dice que $\|h_x\| = 1$. Del Teorema 3.37, h_x se extiende a $\tilde{h}_x \in E^*$ con $\|\tilde{h}_x\| = 1$. Entonces

$$\sup\{|\langle f, x \rangle| : f \in E^*, \|f\| \leq 1\} \geq |\langle \tilde{h}_x, x \rangle| = |\langle h_x, x \rangle| = \|x\|. \quad \square$$

La fórmula (3.21) debe ser comparada con la fórmula para $\|f\|$ con $f \in E^*$, como caso particular de (3.16c):

$$\|f\| = \sup\{|\langle f, x \rangle| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Esta dos fórmulas exhiben la *dualidad* entre los espacios normados E y E^* de una manera concreta: la norma de un elemento en cada espacio se obtiene al maximizar $|\langle f, x \rangle|$ sobre la bola unitaria cerrada del otro.

► Antes de dar por terminado esta sección sobre aplicaciones lineales continuas, se debe señalar que la condición de continuidad (3.15) se extiende de manera natural al caso de aplicaciones bilineales.

Definición 3.40. Sean $(E_1, \|\cdot\|_1)$ y $(E_2, \|\cdot\|_2)$ dos espacios normados. El producto cartesiano $E_1 \times E_2$ se puede identificar con la *suma directa* $E_1 \oplus E_2$ como espacio vectorial. La fórmula

$$\|(x, y)\| := \|x\|_1 + \|y\|_2 \quad \text{para } x \in E_1, y \in E_2,$$

define una norma sobre $E_1 \oplus E_2$. El espacio normado $(E_1 \oplus E_2, \|\cdot\|)$ se considera la *suma directa* de los dos espacios normados dados. Fíjese que si E_1 y E_2 son espacios de Banach, entonces $E_1 \oplus E_2$ es también un espacio de Banach. \diamond

Lema 3.41. Si $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ y $(F, \|\cdot\|)$ son tres espacios normados, una aplicación bilineal $B: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ es continua si y solo si hay una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|B(x, y)\| \leq M \|x\|_1 \|y\|_2 \quad \text{para todo } x \in E_1, y \in E_2. \quad (3.22)$$

Demostración. Si B es continua en $(0, 0) \in E_1 \oplus E_2$, entonces hay $m > 0$ tal que

$$\|\tilde{x}\|_1 + \|\tilde{y}\|_2 < m \implies \|B(\tilde{x}, \tilde{y})\| \leq 1.$$

Tómese $(x, y) \in E_1 \oplus E_2$. Si $x = 0$ o $y = 0$, la desigualdad (3.22) se cumple trivialmente, porque $B(0, y) = B(x, 0) = 0$ por la bilinealidad de B ; se puede suponer, entonces, que $x \neq 0$, $y \neq 0$. Sean $\tilde{x} := m_1 x / \|x\|_1$ y $\tilde{y} := m_2 y / \|y\|_2$ para algunos $m_1, m_2 > 0$ con $m_1 + m_2 = m$. La bilinealidad de B implica que

$$B(x, y) = \frac{\|x\|_1 \|y\|_2}{m_1 m_2} B(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

y por ende (3.22) está satisfecho con $M = 1/m_1 m_2$.

Inversamente, si (3.22) es válida para algún $M > 0$, resulta que B es continua en cada punto (x_0, y_0) de $E_1 \oplus E_2$. En efecto, sea dado $\varepsilon > 0$. Entonces, por bilinealidad,

$$B(x, y) - B(x_0, y_0) = B(x - x_0, y) + B(x_0, y - y_0),$$

y su norma cumple la estimación:

$$\|B(x, y) - B(x_0, y_0)\| \leq M \|x - x_0\|_1 \|y\|_2 + M \|x_0\|_1 \|y - y_0\|_2.$$

Si $\|x - x_0\|_1 < \delta$ y $\|y - y_0\|_2 < \delta$ para algún δ con $0 < \delta < 1$, entonces en particular vale $\|y\|_2 \leq \|y_0\|_2 + \delta < \|y_0\|_2 + 1$. En consecuencia,

$$\|B(x, y) - B(x_0, y_0)\| \leq M\delta(\|y_0\|_2 + 1) + M\delta \|x_0\|_1 < \varepsilon$$

con solo tomar $\delta := \varepsilon(\|x_0\|_1 + \|y_0\|_2 + 1)/M$. □

3.4 Diferenciación en espacios de Banach

En esta sección, todos los espacios normados serán de Banach (completando si fuere necesario); y todas las normas se denotarán por $\|\cdot\|$, sin distinción.

Si E y F son espacios de Banach y si U es un abierto en E , dos funciones $f, g: U \rightarrow F$ se llaman **tangentes** en un punto $x_0 \in U$ si el cociente de normas $\|f(x) - g(x)\|/\|x - x_0\| \rightarrow 0$ cuando $\|x - x_0\| \rightarrow 0$ (es decir, cuando $x \rightarrow x_0$ en E). Esta es una relación de equivalencia. Si f y g son continuas en x_0 , su tangencia implica $f(x_0) = g(x_0)$.

La idea de tangencia es que la función f se aproxima por otra función g de alguna clase predeterminada. Una función afín con $g(x_0) = f(x_0)$ toma la forma

$$g(x) = f(x_0) + T(x - x_0), \quad \text{para } x \in U$$

donde $T: E \rightarrow F$ es *lineal*. Fíjese que g es continua en x_0 si y solo si T es continua en 0 y por ende *continua* en todo E , esto es, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Además, si $h(x) := f(x_0) + S(x - x_0)$ es cualquier función afín de esta clase, entonces g y h son tangentes en x_0 si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|(T - S)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Como $\|(T - S)(x - x_0)\| \leq \|T - S\| \|x - x_0\|$, esto ocurre si y solo si $\|T - S\| = 0$, si y solo si $S = T$. Por lo tanto, hay *a lo sumo una función afín continua*⁸ tangente a f en x_0 .

Definición 3.42. Sean E y F son espacios de Banach, $f: U \rightarrow F$ una función definida en un abierto $U \subseteq E$. Dícese que f es **diferenciable en un punto** $x_0 \in U$ si existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$, necesariamente única, tal que⁹

$$\frac{\|f(x_0 + u) - f(x_0) - Tu\|}{\|u\|} \rightarrow 0 \text{ cuando } u \rightarrow 0 \text{ en } E.$$

Obsérvese que T depende de f y de x_0 ; se escribe $T = \underline{f'(x_0)} \in \mathcal{L}(E, F)$ o alternativamente $T = \underline{Df(x_0)}$. Conviene denotar el cociente anterior genéricamente por $\underline{e(u)}$, así:

$$\|f(x_0 + u) - f(x_0) - f'(x_0)u\| = \underline{e(u)} \|u\|, \quad \text{con } \underline{e(u)} \rightarrow 0 \text{ cuando } u \rightarrow 0. \quad (3.23)$$

La función $f: U \rightarrow F$ es **diferenciable en U** si es diferenciable en cada punto de U . En tal caso, la función $x \mapsto f'(x) \equiv Df(x)$ define una aplicación

$$Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F).$$

Esta es la **derivada** de f . Si esta derivada es una función continua, dícese que f es **continuamente diferenciable en U** , o también **de clase C^1 en U** . \diamond

La condición (3.23) expresa que la función f puede ser aproximada por la función afín $g(x_0 + u) := f(x_0) + f'(x_0)u$ en un vecindario del punto x_0 de una manera precisa. El *gráfo* de g en $E \oplus F$ es un subespacio afín¹⁰ de F que aproxima bien el grafo de f cerca del punto $(x_0, f(x_0))$.

⁸Nótese que esta conclusión no requiere la continuidad de f en x_0 , *a priori*.

⁹Entre espacios de Banach de dimensión infinita, esta definición es bastante restrictiva. Fue propuesta por Maurice Fréchet en 1911 y por eso la condición (3.23) se llama *diferenciable en el sentido de Fréchet*. En 1913, René Gâteaux sugirió que f debería ser diferenciable en x_0 si la derivada direccional $\delta f(x_0; v) := \lim_{t \rightarrow 0} (f(x_0 + tv) - f(x_0))/t$ existe para todo $v \in E$. La función $\delta f(x_0): v \mapsto \delta f(x_0; v)$ no tiene que ser lineal ni continua; pero si $\delta f(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$, se dice que f es *diferenciable en el sentido de Gâteaux* en x_0 . Esta derivada existe en algunos casos donde $f'(x_0)$ no existe; pero si $x \mapsto \delta f(x)$ es continua en U , las dos derivadas coinciden.

¹⁰Un **subespacio afín** de un espacio vectorial V es un conjunto de la forma $v_0 + U = \{v_0 + u : u \in U\}$ donde U es un subespacio vectorial de V .

Ejemplo 3.43. Una función constante $f(x) \equiv y_0$ es claramente diferenciable, con derivada nula $f'(x) \equiv 0 \in \mathcal{L}(E, F)$.

Una función lineal y continua $T: E \rightarrow F$ es diferenciable en cada $x_0 \in E$ y su derivada es la función constante $E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, de valor T . Esto sigue inmediatamente del cálculo trivial:

$$T(x_0 + u) - T(x_0) - T(u) = 0 \quad \text{para todo } x_0, u \in E. \quad \diamond$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ y $F = \mathbb{R}^m$, la aplicación lineal $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ puede representarse en coordenadas cartesianas por una matriz $m \times n$ cuyas entradas son las derivadas parciales $(\partial f_j / \partial x_i)(x_0)$. En el caso $m = n$, la aplicación lineal $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es invertible si y solo si el jacobiano no se anula en ese punto, esto es, $Jf(x_0) := \det f'(x_0) \neq 0$.

Lema 3.44. Sean E y F son espacios de Banach con $U \subseteq E$ abierto. Si $f: U \rightarrow F$ es diferenciable en un punto $x_0 \in U$, entonces f es continua en x_0 .

Demostración. Esto generaliza una observación al inicio de la sección 1.5. Sea dado $\varepsilon > 0$; entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $B(x_0; \delta_1) \subseteq U$ y además

$$\|u\| < \delta_1 \implies e(u) < 1, \quad \text{así que} \quad \|f(x_0 + u) - f(x_0) - f'(x_0)u\| \leq \|u\|.$$

Tómese $\delta := \min\{\delta_1, \varepsilon/(1 + \|f'(x_0)\|)\}$, donde

$$\|f'(x_0)\| := \sup\{\|f'(x_0)u\| : u \in E, \|u\| \leq 1\}$$

es la norma de $f'(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$. Fíjese que $\delta \leq \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \|u\| < \delta &\implies \|f(x_0 + u) - f(x_0)\| \leq \|f'(x_0)u\| + \|u\| \\ &\leq \|f'(x_0)\| \|u\| + \|u\| = (1 + \|f'(x_0)\|) \|u\| \\ &< (1 + \|f'(x_0)\|) \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestre que f es continua en x_0 . □

La importancia de la condición (3.23) es que garantiza la regla de la cadena.

Proposición 3.45. Sean E, F, G tres espacios de Banach, $U \subseteq E$ abierto y $V \subseteq F$ abierto. Sean $f: U \rightarrow V$ diferenciable en $x_0 \in U$ y $g: V \rightarrow G$ diferenciable en $y_0 = f(x_0) \in V$. Entonces la función compuesta $g \circ f: U \rightarrow G$ es también diferenciable en x_0 , y su derivada obedece

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0). \quad (3.24)$$

Al lado derecho, se compone $f'(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ con $g'(y_0) \in \mathcal{L}(F, G)$ para así obtener un elemento de $\mathcal{L}(E, G)$.

Demostración. Sea dado $\varepsilon > 0$. Tómesese $\delta_1 > 0$ tal que $B(y_0; \delta_1) \subseteq V$, y además

$$\|v\| < \delta_1 \implies \|g(y_0 + v) - g(y_0) - g'(y_0)v\| \leq \frac{\varepsilon/2}{1 + \|f'(x_0)\|} \|v\|.$$

En seguida, elíjase $\delta > 0$ con $B(x_0; \delta) \subseteq U$ tal que $\|u\| < \delta$ implica estas desigualdades:

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + u) - f(x_0)\| &< \delta_1, \\ \|f(x_0 + u) - f(x_0)\| &\leq \|f'(x_0)\| \|u\| + \|u\|, \\ \|f(x_0 + u) - f(x_0) - f'(x_0)u\| &\leq \frac{\varepsilon/2}{1 + \|g'(y_0)\|} \|u\|. \end{aligned}$$

La primera desigualdad es factible por la continuidad de f en x_0 , y la segunda sigue de la demostración del Lema 3.44; la tercera viene de la diferenciabilidad de f en x_0 .

Entonces, para $u \in B(x_0; \delta)$, la siguiente estimación es válida:

$$\begin{aligned} &\|g \circ f(x_0 + u) - g \circ f(x_0) - g'(y_0)f'(x_0)u\| \\ &\leq \|g(f(x_0 + u)) - g(f(x_0)) - g'(y_0)(f(x_0 + u) - f(x_0))\| \\ &\quad + \|g'(y_0)(f(x_0 + u) - f(x_0) - f'(x_0)u)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon/2}{1 + \|f'(x_0)\|} \|f(x_0 + u) - f(x_0)\| + \|g'(y_0)\| \frac{\varepsilon/2}{1 + \|g'(y_0)\|} \|u\| \\ &\leq \frac{\varepsilon/2}{1 + \|f'(x_0)\|} (\|f'(x_0)\| \|u\| + \|u\|) + \frac{\varepsilon}{2} \|u\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \|u\| + \frac{\varepsilon}{2} \|u\| = \varepsilon \|u\|. \end{aligned}$$

Luego $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y su derivada cumple (3.24). \square

Corolario 3.46. Sea E un espacio de Banach de dimensión finita y sean U, V dos abiertos en E . Si $f: U \rightarrow V$ es diferenciable en $x_0 \in U$ y $g: V \rightarrow E$ es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, entonces sus jacobianos cumplen

$$J(g \circ f)(x_0) = Jg(y_0)Jf(x_0).$$

En particular, si $f: U \rightarrow V$ es biyectiva y si $g: V \rightarrow U$ es la función inversa de f , entonces $Jg(y_0) = 1/Jf(x_0)$ y $f'(x_0)$ es invertible en $\mathcal{L}(E)$ con $g'(y_0) = f'(x_0)^{-1}$.

Demostración. Basta con tomar el determinante de ambos lados de (3.24). \square

Si E es un espacio de Banach, el Corolario 3.26 muestra que el grupo $\text{GL}(E)$ de elementos invertibles en el álgebra de Banach $\mathcal{L}(E)$ es abierto en $\mathcal{L}(E)$. Considérese el caso de la Proposición 3.45 en el cual $E = F = G$ y $f: U \rightarrow V \subseteq E$, $g: V \rightarrow U \subseteq E$ son funciones mutuamente inversos. En tal caso, la regla de la cadena (3.24) dice que $g'(f(x_0)) \circ f'(x_0) = 1$ en $\mathcal{L}(E)$, así que $f'(x_0) \in \text{GL}(E)$ con $f'(x_0)^{-1} = g'(f(x_0))$.

Esto trae a la memoria el **teorema de la función inversa** del cálculo diferencial ordinaria: Si U_1 es un abierto en \mathbb{R}^n , $x_0 \in U_1$ y $f: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 con $f'(x_0)$ invertible, entonces hay abiertos $U \subset U_1$ y $V \subset f(U)$ donde $x_0 \in U$, $f: U \rightarrow V$ tiene una función inversa $g: V \rightarrow U$ también de clase C^1 , tal que $g'(f(x_0)) = f'(x_0)^{-1}$.

Resulta que este teorema sigue válido al reemplazar \mathbb{R}^n por un espacio de Banach E cualquiera. La demostración, que será omitida en este curso,¹¹ requiere construir la función inversa g y verificar su diferenciabilidad en el punto $f(x_0)$. Un ingrediente esencial en la prueba es la *continuidad de la inversión* $T \mapsto T^{-1}$ en $\text{GL}(E)$. De hecho, la inversión es diferenciable, como se muestra a continuación.

Proposición 3.47. Si A es un álgebra de Banach, la aplicación de inversión $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo del grupo de invertibles A^\times en sí mismo. Además, es diferenciable en cada $x \in A^\times$, con derivada $u \mapsto -x^{-1}ux^{-1}$.

Demostración. La aplicación $A^\times \rightarrow A^\times : x \mapsto x^{-1}$ es su propio inverso; para que sea un homeomorfismo, basta comprobar que es continua. Por el Lema 3.44, es suficiente mostrar que es diferenciable en cada $x \in A^\times$.

Nótese que la receta $u \mapsto -x^{-1}ux^{-1}$ generaliza la fórmula $d/dt[t^{-1}] = -t^{-2}$ del cálculo en una variable. Se debe estimar la norma del siguiente elemento de A :

$$(x + u)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}ux^{-1} = ((1 + x^{-1}u)^{-1} - 1 + x^{-1}u)x^{-1}.$$

Su $\|u\| < 1/\|x^{-1}\|$, entonces $\|x^{-1}u\| < 1$ y la Proposición 3.25 muestra que $1 + x^{-1}u$ es invertible y $x + u = x(1 + x^{-1}u)$ es también invertible. Por lo tanto, todos los términos en la expresión existen – y la igualdad es válida – para $u \in B(0; 1/\|x^{-1}\|)$.

El inverso de $1 + x^{-1}u$ está dada por la serie absolutamente convergente

$$(1 + x^{-1}u)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^{-1}u)^k = 1 - x^{-1}u + \sum_{k=2}^{\infty} (-x^{-1}u)^k.$$

En vista de la estimación

$$\left\| \sum_{k=2}^{\infty} (-x^{-1}u)^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \|x^{-1}u\|^k = \frac{\|x^{-1}u\|^2}{1 - \|x^{-1}u\|} \leq \|x^{-1}u\|^2 \leq \|x^{-1}\|^2 \|u\|^2,$$

se deduce que

$$\|(x + u)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}ux^{-1}\| \leq \|x^{-1}\|^3 \|u\|^2.$$

Luego se verifica (3.23) con $f(x) := x^{-1}$, $f'(x)u = -x^{-1}ux^{-1}$ y $e(u) \leq \|x^{-1}\|^3 \|u\|$, así que $e(u) \rightarrow 0$ cuando $\|u\| \rightarrow 0$. Esto demuestra la diferenciabilidad de $x \mapsto x^{-1}$, con la derivada indicada. \square

¹¹La construcción de g y de su derivada $g'(y_0)$ se basa el teorema de contracción de Banach: Ejercicio 2.20. Por lo tanto, es indispensable que el espacio normado E sea completo. Véase el Teorema 3.2.4 del libro de Duistermaat y Kolk, o el Teorema 5.12.9 del libro de Simon, para la demostración.

3.5 El teorema de Stone y Weierstrass

Los espacios de Banach vistos hasta ahora se han definido de una o dos maneras: bien al comprobar que un determinado espacio normado es completo, o bien al tomar la completación de un espacio normado incompleto. En el segundo caso, toda la información útil reside en la descripción del subespacio denso que da origen a la completación.

En la dirección contraria, el teorema de aproximación de Weierstrass (la Proposición 1.51) identifica un subespacio denso importante del espacio de Banach $C([a, b])$: los polinomios, o mejor dicho, la restricción de los polinomios sobre \mathbb{R} al dominio $[a, b]$.

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto, se puede considerar el espacio de Banach $C(K)$, de funciones continuas $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ con la norma $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in K\}$. Es fácil comprobar, al modificar levemente la demostración de la Proposición 3.13, que $C(K)$ es efectivamente un espacio de Banach. Cabe preguntar, entonces, si las restricciones a K de los polinomios sobre \mathbb{R}^n forman un subespacio denso; es decir, si cada $f \in C(K)$ puede ser aproximado por un polinomio uniformemente sobre K . Eso sería una generalización del teorema de Weierstrass.

Es pertinente hacer dos observaciones:

- (a) La demostración de que $C(K)$ es un espacio de Banach depende de que K sea compacto pero no de que K sea parte de algún \mathbb{R}^n (es decir, no se usa el teorema de Heine y Borel). Entonces se puede tomar K como una parte compacta de un espacio métrico cualquiera.¹²
- (b) $C(K)$ es un álgebra de Banach bajo la multiplicación puntual de funciones:

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)g(x)| = \sup_{x \in K} |f(x)| |g(x)| \leq \sup_{x, y \in K} |f(x)| |g(y)| = \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \quad (3.25)$$

En el caso $K = [a, b]$, los polinomios constituyen una *subálgebra normada*.

Es oportuno notar que la submultiplicatividad $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, que forma parte de la Definición 3.21 de un álgebra normada, a la luz del Lema 3.41,¹³ expresa la *continuidad de la multiplicación* $(x, y) \mapsto xy$. Luego, si hay polinomios $p_n \rightarrow f$ y $q_n \rightarrow g$ en $C([a, b])$, entonces $p_n q_n \rightarrow fg$ también.

Se plantea entonces el siguiente problema de aproximación: si \mathcal{A} es una subálgebra del álgebra de Banach $C(K)$, ¿cuáles condiciones garantizan que \mathcal{A} sea densa en $C(K)$?

¹²Más generalmente, K puede ser un espacio topológico compacto que cumple la propiedad de Hausdorff (dos puntos distintos se separan por abiertos disjuntos).

¹³Por la definición de una álgebra A sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} , la multiplicación $m: A \times A \rightarrow A$, dada por $m(x, y) := xy$, es obviamente bilineal.

Estas condiciones fueron encontrados por Marshall Stone en 1936; después de incorporar una idea de Shizuo Kakutani y los hermanos Kreĭn (c. 1940), Stone dio una nueva demostración en 1948, empleando el orden en \mathbb{R} en vez del producto.

Los casos de escalares reales y complejos dan lugar a condiciones levemente distintos. Conviene abordar primero el caso real: se trata de identificar las subálgebras densas del espacio de Banach real $C(K, \mathbb{R})$.

Definición 3.48. Sea K un espacio métrico compacto. Si $f, g \in C(K, \mathbb{R})$, defínase las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$ sobre K por:

$$\begin{aligned} f \vee g(x) &:= \max\{f(x), g(x)\}, \\ f \wedge g(x) &:= \min\{f(x), g(x)\}, \quad \text{para } x \in K. \end{aligned}$$

Fíjese que

$$\begin{aligned} f \vee g(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|), \\ f \wedge g(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|). \end{aligned}$$

De ahí se ve que $f \vee g$ y $f \wedge g$ son continuas, así que $C(K, \mathbb{R})$ es un **retículo vectorial** (un espacio vectorial conservado bajo las operaciones \vee y \wedge de retículos.) \diamond

Teorema 3.49 (Kakutani, M. Kreĭn y S. Kreĭn). *Sea K un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{R} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ un subretículo vectorial que cumple la siguiente condición:*

★ *si $a, b \in \mathbb{R}$ y si $x \neq y$ en K , entonces hay una función $h \in \mathcal{R}$ tal que $h(x) = a$, $h(y) = b$.*

Entonces \mathcal{R} es denso en $C(K, \mathbb{R})$.

Demostración. Tómesese $f \in C(K, \mathbb{R})$ y dos puntos $x, y \in K$ (no necesariamente distintos). Entonces existe $h_{x,y} \in \mathcal{R}$ tal que

$$h_{x,y}(x) = f(x), \quad h_{x,y}(y) = f(y).$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. Para cada x fijo, la función $h_{x,y} - f$ es continua y se anula en y , así que hay un vecindario abierto $U(y)$ de y tal que

$$h_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon \quad \text{para todo } z \in U(y).$$

Ahora $\mathcal{U} = \{U(y) : y \in K\}$ es un cubrimiento abierto del compacto K . Por lo tanto, hay un número finito de puntos $y_1, \dots, y_m \in K$ tales que $K = U(y_1) \cup \dots \cup U(y_m)$.

Como \mathcal{R} es un retículo, hay un elemento $g_x \in \mathcal{R}$ dado por

$$g_x(z) := \underline{h_{x,y_1} \wedge \dots \wedge h_{x,y_m}}(z) = \min_{1 \leq j \leq m} h_{x,y_j}(z).$$

Obsérvese que $h_{x,y_j}(x) = f(x)$ para cada j , así que $g_x(x) = f(x)$. Además, se ve que $g_x(z) < f(z) + \varepsilon$ para todo $z \in K$.

Como $g_x - f$ es continua y se anula en x , hay un vecindario abierto $V(x)$ de x tal que

$$g_x(z) > f(z) - \varepsilon \quad \text{para todo } z \in V(x).$$

Fíjese que $\mathcal{V} = \{V(x) : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K y por ende hay puntos $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que $K = V(x_1) \cup \dots \cup V(x_n)$. En consecuencia, hay un elemento $g \in \mathcal{R}$ dado por

$$g(z) := \underline{g_{x_1} \vee \dots \vee g_{x_n}}(z) = \max_{1 \leq k \leq n} g_{x_k}(z).$$

Entonces $g(z) > f(z) - \varepsilon$ para todo $z \in K$. Se ha encontrado $g \in \mathcal{R}$ tal que

$$f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon \quad \text{para todo } z \in K.$$

Esto implica que $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Dicho de otro modo, la bola cerrada $\bar{B}(f; \varepsilon)$ en $C(K, \mathbb{R})$ contiene un elemento $g \in \mathcal{R}$; y eso comprueba la densidad de \mathcal{R} en $C(K, \mathbb{R})$. \square

Es de notar que la demostración anterior no usa el producto de funciones en $C(K, \mathbb{R})$. La relevancia del producto viene de una observación de Stone, en el teorema siguiente.

Teorema 3.50 (Stone y Weierstrass, vI). *Sea K un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ una subálgebra real que cumple las siguientes condiciones:*

- ★ \mathcal{A} separa puntos de K : si $x \neq y$ en K , hay una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$;
- ★ \mathcal{A} es unital: la función constante $\mathbf{1}$ pertenece a \mathcal{A} .

Entonces \mathcal{A} es denso en $C(K, \mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\mathcal{R} := \overline{\mathcal{A}}$ la clausura de \mathcal{A} en $C(K, \mathbb{R})$, la cual es un álgebra \mathbb{R} -vectorial.

Afirmación: si $h \in \mathcal{R}$, entonces $|h| \in \mathcal{R}$ también. Fíjese que $h(K) \subseteq [-c, c]$ donde $c := \|h\|_\infty$. En el intervalo compacto $[-c, c]$, la función continua $t \mapsto |t|$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios, debido al teorema de Weierstrass (Proposición 1.51): dado $\varepsilon > 0$, hay un polinomio real p_ε tal que¹⁴

$$||t| - p_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \quad \text{para } t \in [-c, c].$$

Entonces

$$||h(x)| - p_\varepsilon(h(x))| \leq \varepsilon \quad \text{para } x \in K,$$

es decir, $\||h| - p_\varepsilon \circ h\|_\infty \leq \varepsilon$.

¹⁴Por ejemplo, se puede tomar $p_\varepsilon(t) := B_n(|\cdot|; s)$, un polinomio de Bernstein en la variable $s := (t + c)/2c$, para n suficientemente grande.

La composición $p_\varepsilon \circ h$ queda en el álgebra \mathcal{R} ; de hecho, si $p_\varepsilon(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$, entonces $p_\varepsilon \circ h = a_0 \mathbf{1} + a_1 h + \cdots + a_m h^m \in \mathcal{R}$. Se ha comprobado que $|h| \in \overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$, ya que \mathcal{R} es cerrado.

Sean $f, g \in \mathcal{R}$. Las fórmulas

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

ahora muestran que \mathcal{R} es un *retículo* vectorial.

Solo falta comprobar que \mathcal{R} cumple la condición del enunciado del Teorema 3.49. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y si $x \neq y$ en K , por hipótesis hay algún $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Entonces el sistema de ecuaciones lineales:

$$\alpha f(x) + \beta = a, \quad \alpha f(y) + \beta = b,$$

tiene solución única $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Entonces la función $h := \alpha f + \beta \mathbf{1} \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$ cumple $h(x) = a, h(y) = b$.

Por lo tanto, $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{A}}$ cumple las hipótesis del Teorema 3.49 y por lo tanto es denso en $C(K, \mathbb{R})$. Como \mathcal{R} también es cerrado, se concluye que $\mathcal{R} = C(K, \mathbb{R})$ y en consecuencia \mathcal{A} es denso en $C(K, \mathbb{R})$. \square

Como caso particular, si $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$, se puede tomar $\mathcal{A} := \{p|_{[a,b]} : p \in \mathbb{R}[X]\}$ el álgebra de polinomios reales, restringidos al intervalo $[a, b]$. Este ejemplo es un poco tautológico, porque se ha usado el teorema de Weierstrass¹⁵ en la demostración del Teorema 3.50.

► El caso complejo del teorema de Stone y Weierstrass requiere una hipótesis extra. Si $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ es el disco unitario cerrado en \mathbb{C} , los polinomios complejos (restringidos a $\overline{\mathbb{D}}$) forman una subálgebra unital compleja que separa puntos de $\overline{\mathbb{D}}$, pero no es densa en $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$.¹⁶ La hipótesis que falta es que el álgebra \mathcal{A} sea involutiva.

Definición 3.51. Un *involución* en un álgebra compleja A es una biyección $x \mapsto x^*$ de A en A que es *semilineal*: $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$; *involutiva*: $(x^*)^* = x$; y *antimultiplicativa*: $(xy)^* = y^* x^*$.

Un *álgebra involutiva* es una \mathbb{C} -álgebra dotado de una involución. Un ejemplo es $M_n(\mathbb{C})$, en donde A^* es el *adjunto* o *conjugado hermitico* de la matriz A , $[a_{ij}]^* := [\bar{a}_{ji}]$.

Otro ejemplo es $C(K, \mathbb{C})$ para K un compacto; en esta \mathbb{C} -álgebra conmutativa, la involución es el *conjugado complejo* $f \mapsto \bar{f}$, definido por $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$. \diamond

¹⁵En realidad, solo se ha usado un caso particular de ese teorema, para aproximar $t \mapsto |t| = \sqrt{t^2}$ por polinomios. Se puede comprobar esta aproximación directamente al usar, por ejemplo, la serie binomial para $(1 - t)^{1/2}$.

¹⁶Su clausura es el álgebra de las funciones continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ que son *holomorfas* en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Teorema 3.52 (Stone y Weierstrass, v2). *Sea K un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{C})$ una subálgebra compleja que cumple las siguientes condiciones:*

- ★ \mathcal{A} separa puntos de K : si $x \neq y$ en K , hay una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$;
- ★ \mathcal{A} es unital: $1 \in \mathcal{A}$;
- ★ \mathcal{A} es involutiva: $f \in \mathcal{A} \implies \bar{f} \in \mathcal{A}$.

Entonces \mathcal{A} es denso en $C(K, \mathbb{C})$.

Demostración. Considérese la intersección $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \mathcal{A} \cap C(K, \mathbb{R})$. Esta es una subálgebra real unital de $C(K, \mathbb{R})$.

Si $x \neq y$ en K , tómese $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Las partes real e imaginaria de f obedecen:

$$\Re f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad \Im f = \frac{i}{2}(\bar{f} - f),$$

así que $\Re f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ y $\Im f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Como $f(x) = \Re f(x) + i \Im f(x)$, entonces $\Re f(x) \neq \Re f(y)$ o bien $\Im f(x) \neq \Im f(y)$. Luego $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ separa puntos de K .

Por el Teorema 3.50, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ es denso en $C(K, \mathbb{R})$. Si $f \in \mathcal{A}$, hay sucesiones $\{g_n\}, \{h_n\}$ en $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ tales que $g_n \rightarrow \Re f$ y $h_n \rightarrow \Im f$ cuando $n \rightarrow \infty$. Al definir $f_n := g_n + i h_n \in \mathcal{A}$, se ve que $f_n \rightarrow f$ en $C(K, \mathbb{C})$. Por lo tanto, \mathcal{A} es denso en $C(K, \mathbb{C})$. \square

Ejemplo 3.53. Un polinomio trigonométrico es una función $p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma

$$p(e^{i\theta}) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta} = c_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (3.26)$$

donde $a_k := c_k + c_{-k}$, $b_k := i(c_k - c_{-k})$. Este es un polinomio ordinario en dos variables $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$.

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ la totalidad de estos polinomios trigonométricos. Esta es obviamente una \mathbb{C} -álgebra unital e involutiva: nótese que

$$\overline{p(e^{i\theta})} := \sum_{k=-n}^n \overline{c_{-k}} e^{ik\theta}.$$

La identidad $e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$ es un polinomio trigonométrico que, por sí solo, separa los puntos de \mathbb{T} . Por lo tanto, $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ cumple las hipótesis del Teorema 3.52, y por ende es denso en $C(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.

Las funciones en $C(\mathbb{T})$ se identifican con las funciones **periódicas** $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, que cumplen $f(-\pi) = f(\pi)$, bajo la biyección $f \leftrightarrow \tilde{f}$ dada por $\tilde{f}(e^{i\theta}) \equiv f(\theta)$. Bajo esta perspectiva, los polinomios trigonométricos son densos en el álgebra de Banach de funciones continuas periódicas sobre $[-\pi, \pi]$. \diamond

4 Espacios de Hilbert y series de Fourier

Entre los espacios normados completos, son de particular importancia los espacios de Hilbert: aquellos cuyas normas se derivan de productos escalares. Esto permite emplear el concepto fundamental de ortogonalidad, dando así un sesgo geométrico a su análisis.

En este capítulo solo se consideran espacios vectoriales sobre \mathbb{C} . Aunque es posible definir “espacios de Hilbert reales” en paralelo con el caso complejo, por razones históricas y prácticas estos son de menor importancia. Aunque buena parte de su teoría fue desarrollada por Hilbert y Schmidt en sus trabajos (1905–06) sobre ecuaciones integrales, su aplicabilidad a la mecánica cuántica – enfatizada por von Neumann (1926), poco después del anuncio del principio de incertidumbre por Heisenberg – estableció el lugar central de los espacios de Hilbert complejos en la teoría de operadores.¹

4.1 Productos escalares y espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert es un espacio de Banach sobre \mathbb{C} cuya norma está determinada por un producto escalar.

Definición 4.1. Sea E un espacio \mathbb{C} -vectorial. Una aplicación $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ es **semilineal** (o *antilineal*) si $g(x + y) = g(x) + g(y)$ y $g(\alpha x) = \bar{\alpha} g(x)$, para $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Una aplicación $s: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ es **sesquilineal** si $x \mapsto s(x, y)$ es semilineal y $y \mapsto s(x, y)$ es lineal.²

Un **producto escalar** (o *producto interno*) en E es una función $E \times E \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$ con las siguientes propiedades:

- (a) $\langle z | \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z | x \rangle + \beta \langle z | y \rangle$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y, z \in E$ (*linealidad en la segunda variable*);
- (b) $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$ para todo $x, y \in E$ (*hermiticidad*);
- (c) $\langle x | x \rangle \geq 0$, con igualdad solo si $x = 0$ en E (*positividad definida*).

De (a) y (b), se ve que el producto escalar es sesquilineal. El espacio \mathbb{C} -vectorial E dotado de un producto escalar es un **espacio prehilbertiano**. \diamond

¹En los primeros años de la mecánica cuántica, se determinó que las “cantidades observables” son modelados por operadores sobre un espacio de Hilbert (real o complejo). Resulta que una formulación precisa del principio de incertidumbre no es posible con escalares reales. Para una formulación de la axiomática de la mecánica cuántica, que explica la necesidad de usar \mathbb{C} en vez de \mathbb{R} , véase el primer capítulo del libro: Gérard G. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Wiley, 1972.

²En estos apuntes, se usa el **convenio de Dirac**: una forma sesquilineal (por ejemplo, un producto escalar) es *lineal en la segunda variable* pero semilineal en la primera variable. Muchos libros, como las de Dieudonné y Young, usan el convenio opuesto; Simon, en cambio, sigue el convenio de Dirac.

En un espacio prehilbertiano, la siguiente receta define una norma:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}. \quad (4.1)$$

Su positividad y homogeneidad son evidentes (porque $|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$ para $\alpha \in \mathbb{C}$). La desigualdad triangular es una consecuencia del lema siguiente.³

Lema 4.2 (Desigualdad de Schwarz). *Sea E un espacio prehilbertiano. Si $x, y \in E$, se verifica la desigualdad:*

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (4.2)$$

con igualdad solo si x, y son proporcionales.

Demostración. Para todo $t \in \mathbb{R}$, la cantidad siguiente es no negativa:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + t\langle y | x \rangle y\|^2 &= \langle x + t\langle y | x \rangle y | x + t\langle y | x \rangle y \rangle \\ &= \langle x | x \rangle + 2t |\langle x | y \rangle|^2 + t^2 |\langle x | y \rangle|^2 \langle y | y \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, la forma cuadrática real $t \mapsto \|x + t\langle y | x \rangle y\|^2 = At^2 + Bt + C$ toma valores no negativos solamente, así que $B^2 - 4AC \leq 0$, esto es,

$$4|\langle x | y \rangle|^4 \leq 4|\langle x | y \rangle|^2 \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle.$$

De ahí se deduce que

$$|\langle x | y \rangle|^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle,$$

lo cual es equivalente a (4.2).

El caso de igualdad ocurre si y solo si $y = 0$ o bien $x = -t_0 \langle y | x \rangle y$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, si y solo si los vectores x, y son proporcionales. \square

La desigualdad triangular para la norma es inmediata, al observar que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\Re \langle x | y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x | y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Corolario 4.3. *Con respecto a la métrica definida por la norma (4.1), el producto escalar es continua en $E \times E$.*

³Esta desigualdad es una generalización de la desigualdad de Cauchy (1821) para vectores en \mathbb{C}^n . Para $E = C([0, 1])$, fue observado por Viktor Buniakovsky (1859) y Hermann Schwarz notó lo mismo en 1885. Algunos autores lo llaman la desigualdad de Cauchy, Buniakovsky y Schwarz.

Demostración. Si $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$ en E , entonces

$$|\langle y | x_n - x \rangle| \leq \|y\| \|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

así que $\langle y | x_n \rangle \rightarrow \langle y | x \rangle$. De modo similar, se obtiene también $\langle x_n | y \rangle \rightarrow \langle x | y \rangle$. Luego,

$$|\langle y_n - y | x_n - x \rangle| \leq \|y_n - y\| \|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n | x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n | x \rangle + \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y | x_n \rangle - \langle y | x \rangle = \langle y | x \rangle. \quad \square$$

En un espacio prehilbertiano, se puede recuperar el producto de la norma por una fórmula de polarización.

Lema 4.4. *El producto escalar cumple la siguiente igualdad:*

$$4 \langle y | x \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2. \quad (4.3)$$

Demostración. La sesquilinealidad del producto implica que

$$\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y | x \pm y \rangle = \|x\|^2 \pm \langle x | y \rangle \pm \langle y | x \rangle + \|y\|^2. \quad (4.4)$$

Por lo tanto,

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2\langle x | y \rangle + 2\langle y | x \rangle.$$

De manera similar,

$$\|x \pm iy\|^2 = \langle x \pm iy | x \pm iy \rangle = \|x\|^2 \pm i\langle x | y \rangle \mp i\langle y | x \rangle + \|y\|^2,$$

así que

$$i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 = -2\langle x | y \rangle + 2\langle y | x \rangle.$$

La fórmula de polarización (4.3) sigue directamente. \square

Ahora bien, esta fórmula *no implica* que cualquier norma da origen a un producto escalar, porque la norma particular (4.1) cumple otra identidad importante.

Proposición 4.5 (Ley del Paralelogramo). *La norma de un espacio prehilbertiano cumple la siguiente igualdad:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (4.5)$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del cálculo (4.4). \square

Esta “ley” (4.5) obtiene su nombre de un resultado conocida de la geometría euclidiana (en el plano \mathbb{R}^2): la suma de los cuadrados sobre los diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados sobre los cuatro lados. (Dicha afirmación se comprueba fácilmente por la ley de cosenos.)

Resulta que la igualdad (4.5) *caracteriza* las normas que vienen de productos escalares. Un teorema de Pascual Jordan y John von Neumann (1935) dice que si E es un espacio normado complejo que satisface (4.5), entonces la expresión $\langle y | x \rangle$ definido por (4.3) es sesquilineal en (y, x) .

Definición 4.6. Un *espacio de Hilbert* \mathcal{H} es un espacio prehilbertiano que es *completo* y *separable* en la métrica inducida por la norma (4.1). \diamond

Dicho de otro modo, un espacio de Hilbert es un espacio de Banach separable cuya norma cumple la ley del paralelogramo. (Se debe advertir que algunos autores no incluyen la hipótesis de separabilidad en la definición; aquí se sigue el consejo del libro de Simon: todos los espacios de Hilbert que se encuentran en el quehacer del análisis matemático son separables.⁴ De este modo, se evita la consideración de bases ortonormales no numerables.)

Ejemplo 4.7. El espacio finitodimensional \mathbb{C}^n es un espacio de Hilbert, con producto escalar:

$$\langle w | z \rangle := \sum_{j=1}^n \bar{w}_j z_j.$$

Aquí la desigualdad de Schwarz es la desigualdad de Cauchy para vectores en \mathbb{C}^n . \diamond

Ejemplo 4.8. El espacio de Banach ℓ^2 es un espacio de Hilbert, con producto escalar:

$$\langle y | x \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_k x_k.$$

La desigualdad de Schwarz en este caso es

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_k x_k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Esta es una desigualdad de Hölder, con $p = 2$. En consecuencia, la serie al lado izquierdo converge absolutamente y su valor absoluto es acotado por el lado derecho, el cual coincide con $\|x\| \|y\|$. Se deja como ejercicio la verificación de que ℓ^2 es completo. \diamond

Ejemplo 4.9. Sea I un intervalo en \mathbb{R} . Si I es compacto, escríbase $\mathcal{L}^2(I) := C(I)$; pero si I no es compacto, $\mathcal{L}^2(I)$ es el subespacio de funciones continuas sobre I “de cuadrados integrables”, dado por (3.10) con $p = 2$. Su norma es

$$\|f\|_2 := \left(\int_I |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

⁴También es oportuno citar un comentario, quizás apócrifo, de Alain Connes: *¡si tu espacio de Hilbert no es separable, estás haciendo algo mal!*

El producto escalar está dado por:

$$\langle f | g \rangle := \int_I \overline{f(t)} h(t) dt. \quad (4.6)$$

En este caso, la fórmula (3.11), con $p = 2$, es la desigualdad de Schwarz:

$$\left| \int_I \overline{f(t)} h(t) dt \right| \leq \int_I |f(t) h(t)| dt \leq \left(\int_I |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_I |h(t)|^2 dt \right)^{1/2};$$

la cual, de paso, comprueba que la integral (4.6) converge absolutamente.

La completación $L^2(I)$ – véase la Definición 3.15 – es un espacio de Hilbert. \diamond

Ejemplo 4.10. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ es una matriz cuadrada compleja, su **matriz adjunta** A^* es su transpuesta conjugada,⁵ esto es, $[a_{ij}]^* := [\bar{a}_{ji}]$. Fíjese que $A \mapsto A^*$ es una *involución* en el álgebra de matrices $M_n(\mathbb{C})$.

Se define un producto escalar en $M_n(\mathbb{C})$ por la fórmula:

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^* B) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{a}_{jk} b_{jk}. \quad (4.7)$$

Hay un isomorfismo \mathbb{C} -lineal obvia $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$, al considerar las n^2 entradas de A como sus coordenadas cartesianas. El producto escalar (4.7) en $M_n(\mathbb{C})$ corresponde con el producto escalar “ordinaria” en \mathbb{C}^{n^2} , del Ejemplo 4.7. Se debe notar que la expresión $\text{tr}(A^* B)$ es invariante bajo semejanzas unitarias de matrices. Si $U^* U = 1_n$, entonces

$$\text{tr}((UAU^*)^*(UBU^*)) = \text{tr}(UA^* U^* U B U^*) = \text{tr}(UA^* B U^*) = \text{tr}(A^* B U^* U) = \text{tr}(A^* B).$$

Como espacio de Hilbert, $M_n(\mathbb{C})$ está dotado de la **norma de Frobenius** $\|A\|_F := \sqrt{\text{tr}(A^* A)}$. Sin embargo, la relación $\|1_n\|_F = \sqrt{n}$ indica que no es apropiado considerar este espacio de Hilbert como un álgebra de Banach. \diamond

Definición 4.11. Sea E un espacio prehilbertiano. Dos vectores $x, y \in E$ son **ortogonales** si $\langle x | y \rangle = 0$, o equivalentemente $\langle y | x \rangle = 0$, en cuyo caso se escribe $\underline{x \perp y}$.

Una familia de vectores $\{u_j : j \in A\} \subset E$ es **ortonormal** si

$$\langle u_j | u_k \rangle = \llbracket j = k \rrbracket = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k; \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

⁵La palabra *adjunta* se emplea a veces para la matriz B de cofactores de A en vez de A^* ; para distinguirlas, esta B se bautiza la **matriz adjugada** de A , escrito $B = \text{adj } A$. Su propiedad esencial es la relación $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)1_n$, de manera que $A^{-1} = (1/\det A)\text{adj } A$ si A^{-1} existe. En este capítulo no se usa la matriz adjugada.

En otras palabras, los vectores u_j son ortogonales entre sí y además normalizados: $\|u_j\| = 1$ para cada $j \in A$.

Una familia de vectores $\{v_j : j \in A\}$ (no necesariamente ortonormal) es *total* en E si

$$\langle v_j | x \rangle = 0 \quad \text{para todo } j \in A \implies x = 0. \quad \diamond$$

Si los vectores $x_1, \dots, x_r \in E$ son ortogonales, un cálculo directo muestra que

$$\|x_1 + \dots + x_r\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_r\|^2.$$

Lema 4.12 (Fórmula de Pitágoras). *Sea E un espacio prehilbertiano y sea $\{u_1, \dots, u_r\}$ una familia ortonormal finita en E . Cada vector $x \in E$ cumple la relación:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^r |\langle u_j | x \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{j=1}^r \langle u_j | x \rangle u_j \right\|^2. \quad (4.8)$$

Demostración. Colóquese $y := \sum_{j=1}^r \langle u_j | x \rangle u_j$. Por la sesquilinealidad del producto escalar, se obtiene

$$\|y\|^2 = \sum_{j,k=1}^r \overline{\langle u_j | x \rangle} \langle u_k | x \rangle \langle u_j | u_k \rangle = \sum_{j=1}^r |\langle u_j | x \rangle|^2.$$

Escríbase $z := x - y$. Entonces para cada k vale

$$\langle u_k | z \rangle = \langle u_k | x \rangle - \sum_{j=1}^r \langle u_j | x \rangle \langle u_k | u_j \rangle = \langle u_k | x \rangle - \sum_{j=1}^r \langle u_j | x \rangle \mathbb{I}[k = j] = 0.$$

En consecuencia,

$$\langle y | z \rangle = \sum_{j=1}^r \overline{\langle u_j | x \rangle} \langle u_j | z \rangle = \sum_{j=1}^r \langle x | u_j \rangle \langle u_j | z \rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \langle y | y \rangle + \langle y | z \rangle + \langle z | y \rangle + \langle z | z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

la cual es una forma abreviada de (4.8). □

Una consecuencia inmediata de esta fórmula de Pitágoras es la *desigualdad* siguiente.

Proposición 4.13 (Desigualdad de Bessel). *Si $\{u_k : k \in A\}$ es una familia ortonormal en un espacio prehilbertiano E , entonces cada vector $x \in E$ cumple*

$$\sum_{k \in A} |\langle u_k | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (4.9)$$

Demostración. Sea $\{j_1, \dots, j_r\}$ un juego finito de índices en A , así que $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_r}\}$ es una familia ortonormal finita en E . Entonces de la fórmula (4.8) se deduce que

$$\sum_{k=1}^r |\langle u_{j_k} | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

En consecuencia, el conjunto $A_n := \{j \in A : |\langle u_j | x \rangle|^2 \geq \frac{1}{n} \|x\|^2\}$ tiene a lo sumo n elementos; por ende, el juego de índices $\{j \in A : \langle u_j | x \rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable, y la sumatoria en (4.9) bien es finita o bien es una serie ordinaria con términos no negativos.

Dado un vector $x \neq 0$, entonces, es posible ordenar el conjunto $\{j \in A : \langle u_j | x \rangle \neq 0\}$ como $\{j_0, j_1, j_2, \dots\}$. Por lo tanto,

$$\sum_{j \in A} |\langle u_j | x \rangle|^2 = \sum_{k \geq 0} |\langle u_{j_k} | x \rangle|^2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n |\langle u_{j_k} | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad \square$$

Es muy deseable reemplazar la desigualdad de Bessel por una igualdad; para eso, es necesario agregar dos hipótesis: (i) que la familia ortonormal es *total*; y (ii) que el espacio prehilbertiano es *completo*, o sea, es un espacio de Hilbert.

Teorema 4.14. *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y sea $\{u_j : j \in A\}$ una familia ortonormal en H . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) *la familia ortonormal $\{u_j : j \in A\}$ es maximal;*
- (b) *la familia ortonormal $\{u_j : j \in A\}$ es total;*
- (c) *cada vector $x \in \mathcal{H}$ admite un **desarrollo de Fourier** convergente en \mathcal{H} ,*

$$x = \sum_{j \in A} \langle u_j | x \rangle u_j; \quad (4.10)$$

- (d) *cada par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ satisface la **relación de completitud**:*

$$\langle y | x \rangle = \sum_{j \in A} \langle y | u_j \rangle \langle u_j | x \rangle; \quad (4.11)$$

- (e) *cada vector $x \in \mathcal{H}$ satisface la **igualdad de Parseval**:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j \in A} |\langle u_j | x \rangle|^2. \quad (4.12)$$

*Si se cumplen estas condiciones, se dice que $\{u_j : j \in A\}$ es una **base ortonormal** de \mathcal{H} .*

Demostración. En vista de la demostración de la Proposición 4.13, se puede suponer que A es finito o numerable;⁶ se escribe $\{u_j : j \in A\} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$.

Ad (a) \implies (b): Si hubiera $z \neq 0$ en \mathcal{H} con $\langle z | u_j \rangle = 0$ para todo j , sea $v := z/\|z\|$. Este v sería un vector de norma 1 ortogonal a cada u_j , así que $\{v, u_0, u_1, u_2, \dots\}$ sería una familia ortonormal que incluye $\{u_j : j \in A\}$ estrictamente, contradiciendo su maximalidad.

Ad (b) \implies (c): Dado $x \in \mathcal{H}$ y $r \in A$, sea $x_r := \sum_{j=0}^r \langle u_j | x \rangle u_j$. La desigualdad de Bessel muestra que $\|x_r\|^2 = \sum_{j=0}^r |\langle u_j | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ para todo r . Si $r < s$, entonces

$$\|x_s - x_r\|^2 = \sum_{j=r+1}^s |\langle u_j | x \rangle|^2,$$

y la convergencia de la serie $\sum_{j \geq 0} |\langle u_j | x \rangle|^2$, con suma $\leq \|x\|^2$, muestra que $\{x_r\}$ es una *sucesión de Cauchy* en \mathcal{H} . Luego existe un (único) límite $y := \lim_r x_r$ en \mathcal{H} . Entonces vale $y = \sum_{j \geq 0} \langle u_j | x \rangle u_j$ como suma de una serie convergente en \mathcal{H} .

La continuidad del producto escalar muestra que $\langle u_k | y \rangle = \lim_r \langle u_k | x_r \rangle = \langle u_k | x \rangle$ para todo k . Luego $\langle u_k | x - y \rangle = 0$ para todo k . Como la familia $\{u_k : k \in A\}$ es total, se concluye que $y = x$.

Ad (c) \implies (d): Dados $x, y \in H$, hay dos desarrollos de Fourier convergentes:

$$x = \sum_{j \geq 0} \langle u_j | x \rangle u_j, \quad y = \sum_{k \geq 0} \langle u_k | y \rangle u_k.$$

De la continuidad del producto escalar, se obtiene la siguiente suma convergente en \mathbb{C} :

$$\langle y | x \rangle = \sum_{j,k \geq 0} \overline{\langle u_k | y \rangle} \langle u_j | x \rangle \langle u_k | u_j \rangle = \sum_{j \geq 0} \langle y | u_j \rangle \langle u_j | x \rangle.$$

Ad (d) \implies (e): Es cuestión de tomar $y = x$ en (4.11).

Ad (e) \implies (a): Si $\{u_j : j \in A\}$ no fuera maximal, habría un vector $v \in \mathcal{H}$ de norma 1 con $\{v, u_0, u_1, u_2, \dots\}$ ortonormal. La igualdad de Parseval (4.12) entonces implicaría que $1 = \|v\|^2 = \sum_{j \geq 0} |\langle u_j | v \rangle|^2 = 0$, absurdo! Luego $\{u_j : j \in A\}$ sí es maximal. \square

Los coeficientes en una expansión de tipo (4.10) son *únicos*: si $x = \sum_{j \in A} \alpha_j u_j$ con $\{\alpha_j\}$ una familia en \mathbb{C} tal que $\sum_{j \in A} |\alpha_j|^2 < \infty$, entonces

$$\langle u_k | x \rangle = \sum_{j \in A} \alpha_j \langle u_k | u_j \rangle = \alpha_k \quad \text{para todo } k \in A.$$

⁶En principio, el conjunto de índices A en (4.9) podría ser no numerable; en cuyo caso, una suma de términos no negativos se define como el supremo de todas las posibles sumas parciales finitas. El argumento de esta demostración muestra que una *serie convergente* de esta clase solo posee un número contable de términos no nulos, luego se puede reordenar (por convergencia absoluta) como una serie ordinaria. Como corolario, se ve que una serie incontable de números positivos diverge a $+\infty$.

Dada una base ortonormal $\{u_j : j \in A\}$, sus elementos cumplen $\|u_j - u_k\| = \sqrt{2}$ para $j \neq k$. Como un espacio de Hilbert es *separable* por hipótesis, esto implica que A debe ser finito o numerablemente infinito. Entonces solo hay dos casos que considerar: $\dim \mathcal{H} = n$ finito; o bien $\dim \mathcal{H} = \infty$ y tiene una base ortonormal $\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$. Resulta que la cardinalidad de la base ortonormal determina el espacio de Hilbert hasta isomorfismo.

Proposición 4.15. *Dos espacios de Hilbert \mathcal{H} y \mathcal{K} , con dos bases ortonormales respectivos*

$$\{u_j : j \in A\} \subset \mathcal{H} \quad \text{y} \quad \{v_k : k \in B\} \subset \mathcal{K},$$

son isométricamente isomorfos si y solo si los conjuntos índice A y B tienen igual cardinalidad.

Demostración. Ad (\Rightarrow): Supóngase que A y B tienen la misma cardinalidad, es decir, que hay una biyección $\sigma : A \rightarrow B$. Considérese la aplicación lineal $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ definida por la receta:

$$U\left(\sum_{k \in A} \alpha_k u_k\right) := \sum_{k \in A} \alpha_k v_{\sigma(k)} \quad \text{toda vez que} \quad \sum_{k \in A} |\alpha_k|^2 < \infty.$$

En efecto, por (4.10) y (4.12), cada $x \in \mathcal{H}$ tiene una expansión única $x = \sum_{k \in A} \alpha_k u_k$ con $\sum_{k \in A} |\alpha_k|^2 = \|x\|^2 < \infty$. El Teorema 4.14 también muestra que cada serie $\sum_{k \in A} \alpha_k v_{\sigma(k)}$ con $\sum_{k \in A} |\alpha_k|^2 < \infty$ define un vector en \mathcal{K} ; en particular, U es sobreyectiva.

Es evidente por la igualdad de Parseval (4.12) que U es una isometría. Entonces \mathcal{H} y \mathcal{K} son isométricamente isomorfos mediante la isometría sobreyectiva U .

Ad (\Leftarrow): Supóngase que existe una isometría biyectiva $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$. La fórmula de polarización (4.3) muestra que V conserva el producto escalar:

$$\langle Vy | Vx \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|Vx + i^k Vy\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2 = \langle y | x \rangle.$$

Sea $w_k := Vu_k \in \mathcal{K}$. Entonces $\{w_k : k \in A\}$ es una familia ortonormal en \mathcal{K} , porque

$$\langle w_j | w_k \rangle = \langle Vu_j | Vu_k \rangle = \langle u_j | u_k \rangle = \llbracket j = k \rrbracket.$$

Además, si $y \in \mathcal{K}$, hay un único $x \in \mathcal{H}$ con $y = Vx$. Por lo tanto, vale

$$\langle w_k | y \rangle = \langle Vu_k | Vx \rangle = \langle u_k | x \rangle \quad \text{para todo} \quad k \in A.$$

Si $\langle w_k | y \rangle = 0$ para todo k , entonces $\langle u_k | x \rangle = 0$ para todo k , así que $x = 0$ y por ende $y = 0$; luego, la familia ortonormal $\{w_k : k \in A\}$ es *total* en \mathcal{K} ; es decir, es una base ortonormal de \mathcal{K} .

Si A es finito con $\#(A) = n$, la ecuación (4.10) dice que $\{u_k : k \in A\}$ es una base ordinaria del espacio vectorial \mathcal{H} , luego $\dim \mathcal{H} = n$; por ser $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ lineal y biyectiva, se obtiene $\#(B) = \dim \mathcal{K} = n$ también.

Si A es numerablemente infinito, cada $B_k := \{r \in B : \langle w_k | v_r \rangle \neq 0\}$ es un conjunto numerable (posiblemente finito). Si $s \in B$, no es posible que $\langle w_k | v_s \rangle = 0$ para todo k , ya que $\{w_k : k \in A\}$ es total en \mathcal{K} pero $\|v_s\| = 1$. Luego $B = \bigcup_{k \in A} B_k$ es numerable. Al reemplazar V por la isometría biyectiva $V^{-1} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$, se ve que A sería finito si B fuera finito; como eso no es el caso, se concluye que B es numerablemente infinito. \square

La Proposición 4.15 demuestra que todo espacio de Hilbert de dimensión finita n es isomorfo al espacio vectorial \mathbb{C}^n con su base ortonormal estándar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

► Muchos ejemplos concretos de bases ortonormales se construyen mediante el **algoritmo de Gram y Schmidt**. Dado un espacio de Hilbert \mathcal{H} , se identifica primero un conjunto de vectores $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ *linealmente independientes*, que es *total* en \mathcal{H} .

Defínase $u_0 := x_0 / \|x_0\|$ (para que $\|u_0\| = 1$); defínase $y_1, u_1, y_2, u_2, \dots$ inductivamente por:

$$y_n := x_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k | x_n \rangle u_k, \quad u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

En cada paso, se sustrae de x_n sus componentes en las direcciones de los u_k previamente contruidos, y luego se normaliza el residuo y_n para obtener un vector u_n de norma 1.

La independencia lineal de los x_n garantiza que cada $y_n \neq 0$. El algoritmo muestra que los subespacios generados por los vectores iniciales coinciden:

$$\text{lin}\langle u_0, u_1, \dots, u_n \rangle = \text{lin}\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \quad \text{para cada } n.$$

Como $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ es total, esta condición implica que $\{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ es también total. Por lo tanto, $\{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} .

Ejemplo 4.16. En el espacio de Hilbert de sucesiones ℓ^2 , la **base estándar** es $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, donde $e_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ es la sucesión con 1 en el k -ésimo lugar y 0 en los demás lugares. Es obvio que esta familia es ortonormal. Si $x = \{x_n\} \in \ell^2$, es también evidente que $\langle e_k | x \rangle = x_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$; de ahí es inmediato que $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ es total.

El desarrollo de Fourier (4.10) con respecto a la base estándar es:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k.$$

Esta es una serie convergente en la norma de ℓ^2 . La mera definición de la norma,

$$\|x\|^2 := \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2$$

es una instancia de la igualdad de Parseval (para la base estándar). La relación de completitud (4.11) se reduce a la definición del producto escalar: $\langle y | x \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_k x_k$. \diamond

La Proposición 4.15 tiene una consecuencia de gran importancia: *cualquier espacio de Hilbert infinitodimensional es isomorfo a ℓ^2* . Dado un espacio de Hilbert \mathcal{H} con una base ortonormal $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$, se define un isomorfismo concreto $U: \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}$ al colocar $Ue_k := u_k$ para $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.17. Sea $\mathcal{H} = L^2([-1, 1])$, la compleción de $C([-1, 1])$ en la norma $\|\cdot\|_2$ obtenida del producto escalar (4.6).

El conjunto de *monomios* $\{1, t, t^2, t^3, \dots\} \subset C([-1, 1])$ es linealmente independiente (un polinomio es nulo si y solo si cada coeficiente es 0).

Además, este conjunto es total en $\mathcal{LC}^2([-1, 1])$. En efecto, si $f \in C([-1, 1])$ satisface $\int_{-1}^1 t^k f(t) dt = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\int_{-1}^1 \overline{p(t)} f(t) dt = 0$ para todo polinomio p . Por la Proposición 1.51, hay una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que $p_n(t) \rightarrow f(t)$ uniformemente en $[-1, 1]$; luego $\overline{p(t)} f(t) \rightarrow |f(t)|^2$ uniformemente en $[-1, 1]$. Entonces la Proposición 1.41 muestra que

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \overline{p_n(t)} f(t) dt = 0,$$

así que $f(t) \equiv 0$ en $[-1, 1]$.

Como resultado, $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$ es también total en $L^2([-1, 1])$. Al aplicar el algoritmo de Gram y Schmidt, se obtiene una base ortonormal de polinomios $\{\tilde{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde cada \tilde{P}_n tiene grado n . Es convencional poner $P_n(t) := \sqrt{(2n+1)/2} \tilde{P}_n(t)$ – resulta que los P_n cumplen $P_n(1) = 1$ para todo n . Los P_n se llaman *polinomios de Legendre*; los ejemplos de grado bajo son:⁷

$$\begin{aligned} P_0(t) &\equiv 1, & P_1(t) &= t, & P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), & P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3). \end{aligned} \quad \diamond$$

Ejemplo 4.18. En el Ejemplo 3.53 se mostró que los *polinomios trigonométricos* determinan funciones continuas periódicas en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$p(\theta) \equiv \tilde{p}(e^{i\theta}) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta}.$$

Estas funciones también pueden considerarse como elementos del espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2[-\pi, \pi]$. Los “monomios trigonométricos” $u_n(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$, para $n \in \mathbb{Z}$, forman una

⁷Cada polinomio de Legendre es una solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden: $(1-t^2)x''(t) - 2tx'(t) + n(n+1)x(t) = 0$. La solución P_n cumple las “condiciones de frontera” $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$ en el intervalo $[-1, 1]$. La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que los P_n son ortogonales: $\langle P_m | P_n \rangle = \sqrt{2/(2n+1)} \llbracket m = n \rrbracket$. Esta es una manera alternativa de llegar a esta base ortonormal de $L^2([-1, 1])$.

familia ortonormal, porque

$$\langle u_m | u_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \llbracket m = n \rrbracket.$$

Resulta que esta familia ortonormal es *maximal*, porque los polinomios trigonométricos forman un subespacio denso de $\mathcal{LC}^2([-\pi, \pi])$. En efecto, sea $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se puede obtener una función continua y *periódica* $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ al modificar f como sigue:

$$g(\theta) := f(\theta) \text{ si } -\pi \leq \theta \leq \pi - \delta, \quad g(\pi) := f(-\pi), \quad g \text{ afín en } [\pi - \delta, \pi],$$

para algún $\delta \in (0, 2\pi)$ apropiado.

Nótese que $|g(\theta)| \leq \max\{|f(-\pi)|, |f(\pi - \delta)|\}$ para $\theta \in [\pi - \delta, \pi]$; en consecuencia, $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Por la desigualdad triangular, se obtiene $\|f - g\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$.

Sea dado $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 3.52 de Stone y Weierstrass (véase el Ejemplo 3.53), hay un polinomio trigonométrico p tal que $\|g - p\|_\infty < \varepsilon/\sqrt{8\pi}$. \llbracket Defínase $\tilde{g} \in C(\mathbb{T})$ por $\tilde{g}(e^{i\theta}) := g(\theta)$. \rrbracket Entonces:

$$\begin{aligned} \|g - p\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta) - p(\theta)|^2 d\theta \leq \frac{\varepsilon^2}{8\pi} (2\pi) = \frac{\varepsilon^2}{4}, \\ \|f - g\|_2^2 &= \int_{\pi-\delta}^{\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\theta \leq \delta \|f - g\|_\infty^2 \leq 4\delta \|f\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Al tomar $\delta := \varepsilon^2/16\|f\|_\infty^2$ si $f \neq 0$, se obtiene

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto muestra que tales p forman un subespacio denso de $\mathcal{LC}^2([-\pi, \pi])$; lo cual implica que también forman un subespacio denso de $L^2[-\pi, \pi]$. Se concluye que $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es una *base ortonormal* de $L^2[-\pi, \pi]$.⁸

El desarrollo (4.10) en este caso es la **serie de Fourier** de un elemento de $L^2[-\pi, \pi]$. \diamond

Es importante notar que la fórmula (4.10) expresa la convergencia de esta serie *en la norma $\|\cdot\|_2$ del espacio de Hilbert*; pero aun cuando este elemento sea una función continua periódica en $\mathcal{LC}^2([-\pi, \pi])$, esto *no implica su convergencia uniforme* en la norma $\|\cdot\|_\infty$ de $C([-1, 1])$. Estas dos normas no son equivalentes; en efecto, las estimaciones del Ejemplo 4.18 ejemplifican algunas de las diferencias entre las dos normas.

⁸En general, la demostración de que una familia ortonormal sea total o maximal requiere un ejercicio no trivial de análisis, como ya se constató en el Ejemplo 4.17.

4.2 La geometría de los espacios de Hilbert

Definición 4.19. Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . El complemento ortogonal de M es el subespacio cerrado

$$M^\perp := \{y \in \mathcal{H} : \langle y | x \rangle = 0 \text{ para todo } x \in M\}. \quad (4.13)$$

Obsérvese que $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$ y que $\{0\}^\perp = \mathcal{H}$. \diamond

Fíjese que $z \in M^{\perp\perp} = (M^\perp)^\perp$ si y solo si $\langle y | z \rangle = 0$ para todo $y \in M^\perp$. De ahí es evidente que $M \subseteq M^{\perp\perp}$; de hecho, por ser $M^{\perp\perp}$ un subespacio cerrado de \mathcal{H} , se ve que $\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$.

El concepto de ortogonalidad en espacios de Hilbert permite abordar construcciones geométricas como la construcción de una recta perpendicular a un hiperplano a través de un punto externo, o de “bajar una perpendicular” desde ese punto externo al hiperplano. (Un *hiperplano* es un subespacio afín de codimensión 1.) El resultado siguiente ofrece un contexto más general para ese tipo de construcciones.

Proposición 4.20. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y sea $C \subseteq \mathcal{H}$ una parte convexa y cerrada. Si $x \in \mathcal{H}$, hay un único punto $z \in C$ tal que

$$\|x - z\| = d(x, C) \equiv \inf_{y \in C} \|x - y\|. \quad (4.14)$$

Demostración. Si $x \in C$, entonces $d(x, C) = 0$; en ese caso se toma $z = x$, la cual es obviamente la única posibilidad para z .

Supóngase que $x \notin C$. Como C es cerrado, la distancia $d = d(x, C)$ es positiva: $d > 0$. Tómese una sucesión $\{y_k\} \subseteq C$ tal que

$$\|x - y_k\|^2 < d^2 + \frac{1}{k+1} \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \quad (4.15)$$

La Proposición 4.5 (ley del paralelogramo) entonces implica que

$$\begin{aligned} \|y_j - y_k\|^2 &= \|(y_j - x) - (y_k - x)\|^2 \\ &= 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - \|(y_j - x) + (y_k - x)\|^2 \\ &= 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_j + y_k)\|^2 \\ &\leq 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - 4d^2 < \frac{2}{j+1} + \frac{2}{k+1}, \end{aligned}$$

porque $\frac{1}{2}(y_j + y_k) \in C$ por convexidad. Por lo tanto, $\{y_k\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathcal{H} . Como \mathcal{H} es completo, hay un (único) punto $z \in H$ tal que $y_k \rightarrow z$. Está claro que

$z \in C$ porque C es cerrado en \mathcal{H} . Esto implica que $\|x - z\| \geq d$; y de (4.15) se ve que $\|x - z\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_k\| \leq d$. Por lo tanto, vale $\|x - z\| = d$.

Para la unicidad, supóngase que $w \in C$ cumple $\|x - w\| = d$. Entonces $\frac{1}{2}(z + w) \in C$ por convexidad, y la ley del paralelogramo muestra que

$$\begin{aligned}\|z - w\|^2 &= 2\|x - z\|^2 + 2\|x - w\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(z + w)\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(z + w)\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,\end{aligned}$$

así que $\|z - w\| = 0$ y por ende $w = z$. \square

La relación $\|x - z\| = d(x, C)$ de (4.14) dice que la distancia del punto x al conjunto C no solo es un ínfimo sino que es un *mínimo*: el punto especial $z \in C$ es *el punto de C más cercano a x* . Esta propiedad de tener un punto más cercano aprovechó la ley del paralelogramo, lo que limita la validez de la demostración a los espacios de Hilbert. De hecho, hay muchos espacios de Banach en las cuales la Proposición 4.20 no es válida.

Un **subespacio afín**, de la forma $M + y = \{x + y : x \in M\}$ para algún subespacio vectorial M , es obviamente convexa, y es cerrado si M es cerrado. En particular, un subespacio cerrado es un conjunto cerrado y convexo. La proposición anterior ahora permite comprobar que $\overline{M} = M^{\perp\perp}$.

Definición 4.21. Sean \mathcal{H}, \mathcal{K} dos espacios de Hilbert. Su suma directa $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ (como espacios \mathbb{C} -vectoriales) incluye \mathcal{H} y \mathcal{K} como subespacios vectoriales de tal manera que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \{0\}$. Se identifica $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ con el producto cartesiano $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ como espacio vectorial. Las inclusiones respectivas $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ y $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ se definen al identificar $x \leftrightarrow (x, 0)$ y $y \leftrightarrow (0, y)$. Sobre la suma directa se define el producto escalar

$$\langle x_1 + y_1 \mid x_2 + y_2 \rangle := \langle x_1 \mid x_2 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle y_1 \mid y_2 \rangle_{\mathcal{K}} \quad \text{para } x_1, x_2 \in \mathcal{H}; y_1, y_2 \in \mathcal{K}.$$

Con este producto escalar $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert, la suma directa ortogonal de \mathcal{H} y \mathcal{K} . En ella se cumple⁹

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{para } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}.$$

Si \mathcal{H} y \mathcal{K} tienen respectivas bases ortonormales $\{u_k : k \in A\}$ y $\{v_r : r \in B\}$, su unión disjunta $\{u_k : k \in A\} \uplus \{v_r : r \in B\}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$. \diamond

Proposición 4.22. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Su complemento ortogonal M^\perp es otro subespacio cerrado tal que $M^{\perp\perp} = M$. Hay un isomorfismo de espacios de Hilbert $M \oplus M^\perp \simeq \mathcal{H}$.

⁹En el capítulo anterior, se introdujo otra norma $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$ en la suma directa de dos espacios de Banach. Resulta que esta norma no cumple la ley del paralelogramo (en general), pero es equivalente a norma $(x, y) \mapsto \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.

Demostración. Ya se ha observado que $M \subseteq (M^\perp)^\perp$. Cada $x \in M \cap M^\perp$ cumple $\langle x | x \rangle = 0$, por la definición (4.13); luego $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Tómese $x \in \mathcal{H}$, arbitrario pero fijo. Por la Proposición 4.20, hay un único $z \in M$ tal que $\|x - z\| = d(x, M)$. Escribáse $w := x - z$. Para $y \in M$, $t \in \mathbb{R}$ cualesquiera, se calcula que

$$\begin{aligned} d(x, M)^2 &\leq \|x - (z + ty)\|^2 = \|w - ty\|^2 = \|w\|^2 - 2t \Re \langle w | y \rangle + t^2 \|y\|^2 \\ &= d(x, M)^2 - 2t \Re \langle w | y \rangle + t^2 \|y\|^2, \end{aligned}$$

así que $t^2 \|y\|^2 - 2t \Re \langle w | y \rangle \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica $\langle w | y \rangle = 0$.

Como $y \in M$ es arbitrario, se concluye que $w \in M^\perp$. Entonces cada $x \in \mathcal{H}$ es una suma de la forma

$$x = z + w, \quad \text{con } z \in M, w \in M^\perp.$$

Como $z \in M$ es única, la diferencia $w = x - z \in M^\perp$ es única también, así que la descomposición $x = z + w$ es única.

Esto dice que $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ como suma directa de espacios vectoriales. Además, sus productos escalares coinciden, porque

$$\|x\|^2 = \langle z + w | z + w \rangle = \langle z | z \rangle + 2\Re \langle w | z \rangle + \langle w | w \rangle = \|z\|^2 + \|w\|^2.$$

Como M es cerrado en \mathcal{H} por hipótesis y M^\perp es cerrado por naturaleza, tanto M como M^\perp es un espacio de Hilbert. Entonces vale $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ como suma directa ortogonal de espacios de Hilbert.

Si $\{u_k : k \in A\}$ y $\{v_r : r \in B\}$ son bases ortonormales respectivas para M y M^\perp , su unión disjunta es una base ortonormal para \mathcal{H} . Por lo tanto, hay un desarrollo de Fourier de x , dado por (4.10):

$$x = \sum_{k \in A} \langle u_k | x \rangle u_k + \sum_{r \in B} \langle v_r | x \rangle v_r = \sum_{k \in A} \langle u_k | z \rangle u_k + \sum_{r \in B} \langle v_r | w \rangle v_r.$$

Cada $x \in M^{\perp\perp}$ cumple $\langle v_r | x \rangle = 0$ para todo r , luego obedece $x = \sum_{k \in A} \langle u_k | z \rangle u_k$; y esto implica que $x \in M$. Se concluye que $M^{\perp\perp} = M$. \square

La descomposición de un espacio de Hilbert (de muchas maneras) en la suma directa ortogonal de dos subespacios cerrados (donde cada subespacio es el complemento ortogonal del otro) impone una estructura “euclidiana” sobre su geometría. Entre las consecuencias inmediatas es el siguiente *teorema de representación*, obtenido por Frigyes Riesz.

Teorema 4.23 (Riesz). *Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert, su espacio dual \mathcal{H}^* es isométricamente isomorfo a \mathcal{H} , mediante la correspondencia (semilineal):*

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^* : y \mapsto f_y \quad \text{donde} \quad f_y(x) := \langle y | x \rangle.$$

Demostración. Para todo $y \in \mathcal{H}$, la forma lineal $f_y: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_y(x) := \langle y | x \rangle$ es continua, en vista de la desigualdad de Schwarz:

$$|f_y(x)| = |\langle y | x \rangle| \leq \|y\| \|x\|.$$

Por la definición de la norma dual en el espacio de Banach \mathcal{H}^* ,

$$\|f_y\| := \sup\{|f_y(x)| : \|x\| \leq 1\},$$

se ve también que $\|f_y\| \leq \|y\|$. Si $y = 0$, entonces $f_y = 0$ en \mathcal{H}^* . Si $y \neq 0$, se puede tomar $x := y/\|y\|$, para el cual $f_y(x) = \langle y | y \rangle / \|y\| = \|y\|$; eso dice que el supremo se alcanza en $x = y/\|y\|$. En resumen, se obtiene $\|f_y\| = \|y\|$ para todo $y \in \mathcal{H}$.

Defínase una isometría $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ por $V(y) := f_y$. Está claro que V es semilineal:

$$\langle \alpha y_1 + \beta y_2 | x \rangle = \bar{\alpha} \langle y_1 | x \rangle + \bar{\beta} \langle y_2 | x \rangle \quad \text{para } y_1, y_2 \in \mathcal{H}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Además V es inyectiva porque es una isometría; falta ver que V es sobreyectiva.

Ahora tómese $f \in \mathcal{H}^*$ con $f \neq 0$. El *núcleo* de la forma lineal f es un subespacio propio $M := \ker f \subset \mathcal{H}$. Como f es continua, $M = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado. La Proposición 4.22 muestra que $M^\perp \neq 0$ (Si fuera $M^\perp = \{0\}$, sería $M = M^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$, que implicaría $f = 0$.)

Entonces existe un vector $z \in M^\perp$ con $\|z\| = 1$ y además $f(z) \neq 0$. Si $w \in M^\perp$, sea $\alpha := f(w)/f(z)$; entonces

$$w - \alpha z \in M^\perp \quad \text{con} \quad f(w - \alpha z) = f(w) - \alpha f(z) = 0,$$

así que $w - \alpha z \in M \cap M^\perp = \{0\}$ y por ende $w = \alpha z$. Se concluye que $M^\perp = \mathbb{C}z$, un espacio vectorial unidimensional.

Como $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ por la Proposición 4.22, cada $x \in \mathcal{H}$ es de la forma $x = v + \beta z$ con $v \in M$, $\beta \in \mathbb{C}$. Colóquese $y := \overline{f(z)}z$. En vista de la propiedad $\langle z | z \rangle = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f(v + \beta z) = \beta f(z) = \beta f(z) \langle z | z \rangle \\ &= \langle \overline{f(z)}z | \beta z \rangle = \langle y | \beta z \rangle = \langle y | v + \beta z \rangle = \langle w | x \rangle. \end{aligned}$$

Esto dice que $f = f_y$, así que la isometría V es sobreyectiva. Conclusión: $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ es un isomorfismo isométrico. \square

La segunda parte de la demostración anterior dice que cualquier forma lineal continua f está *representada* por un vector $y \in \mathcal{H}$ de modo concreto. Por eso, este teorema se llama a veces **el teorema de representación de Riesz**. Sin embargo, hay otro teorema con ese mismo nombre y una resultado similar, pero menos obvia: cualquier forma lineal continua sobre $C([a, b])$ está representada por *una función de variación acotada* sobre $[a, b]$. Se demostrará ese teorema en el Apéndice.

No es difícil comprobar que la condición de continuidad para aplicaciones lineales y semilineales es la misma – véase el Lema 3.27. Si $S: E \rightarrow F$ es una aplicación *semilineal* entre dos espacios normados (sobre \mathbb{C}), entonces S es continua en E si y solo si es continua en $0 \in E$, si y solo si se verifica $\|Sx\| \leq M \|x\|$ para alguna constante $M \geq 0$. Se define la norma $\|S\|$ por las mismas fórmulas (3.16) relevantes para aplicaciones lineales. En particular, para la isometría semilineal $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ de la demostración anterior, se verifica

$$\begin{aligned} \|V\| &= \sup\{ \|Vy\| : \|y\| \leq 1 \} \\ &= \sup\{ |\langle y | x \rangle| : \|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1 \} \\ &= \sup\{ \|y\| \|x\| : \|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1 \} = 1. \end{aligned}$$

El caso de igualdad en la desigualdad de Schwarz es aplicable porque se puede tomar $y = x$ en el cálculo del supremo.

Hay una manera alternativa de enfocar el resultado del teorema de Riesz, al modificar la multiplicación escalar en \mathcal{H} .

Definición 4.24. Si E es un espacio \mathbb{C} -vectorial, se define el **espacio vectorial conjugado** $\bar{E} \equiv \{ \bar{x} : x \in E \}$ como una copia de E con la misma operación de suma, pero con otra multiplicación escalar:

$$\bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y}, \quad \bar{\alpha} \cdot \bar{x} := \overline{\alpha x}, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{C}, x, y \in E.$$

Nótese que la identificación $x \mapsto \bar{x}$ es una aplicación *semilineal* de E en \bar{E} .

Si E es un espacio prehilbertiano, se define el producto escalar conjugado en \bar{E} por la fórmula

$$\langle \bar{x} | \bar{y} \rangle := \langle y | x \rangle \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

De ahí se nota que $\|\bar{x}\|^2 = \|x\|^2$, de modo que la biyección semilineal $x \mapsto \bar{x}$ es un isomorfismo isométrico. \diamond

Con esta notación, la correspondencia $\bar{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}^* : \bar{y} \mapsto f_y$ es una isometría *lineal* entre el espacio de Hilbert conjugado $\bar{\mathcal{H}}$ y el espacio de Banach dual \mathcal{H}^* . Es una cuestión de gustos¹⁰ si se prefiere representar \mathcal{H}^* por \mathcal{H} o por $\bar{\mathcal{H}}$.

► La identificación de un espacio de Hilbert con su espacio dual tiene otra consecuencia importante: una fórmula alternativa para la norma de una aplicación lineal continua entre dos espacios de Hilbert.

¹⁰En la notación de Dirac, se denotan elementos de \mathcal{H} por **vectores ket** $|x\rangle$ y los elementos de \mathcal{H}^* por **vectores bra** $\langle y|$. El resultado de la evaluación de $\langle y|$ sobre $|x\rangle$ es el producto escalar $\langle y | x \rangle$; un *bracket*, en inglés. En esta notación, la identificación de \mathcal{H}^* con $\bar{\mathcal{H}}$ es implícita.

Lema 4.25. Sea $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ una aplicación lineal continua entre dos espacios de Hilbert \mathcal{H} y \mathcal{K} . Entonces

$$\|T\| = \sup\{ |\langle w | Tx \rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1, \|w\|_{\mathcal{K}} \leq 1 \}. \quad (4.16)$$

Demostración. La desigualdad de Schwarz da una fórmula para la norma de un vector en \mathcal{K} :

$$\|z\| = \sup\{ |\langle w | z \rangle| : \|w\| \leq 1 \},$$

porque el supremo se alcanza en el caso de igualdad cuando w y z son proporcionales.¹¹

La fórmula deseada sigue de inmediato:

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \sup\{ \|Tx\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1 \} \\ &= \sup\{ |\langle w | Tx \rangle| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1; w \in \mathcal{K}, \|w\| \leq 1 \}. \end{aligned} \quad \square$$

Lema 4.26. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ una aplicación lineal continua entre dos espacios de Hilbert \mathcal{H} y \mathcal{K} . Entonces la fórmula siguiente:

$$\langle T^* w | x \rangle := \langle w | Tx \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}, w \in \mathcal{K} \quad (4.17)$$

define una **aplicación adjunta** $T^*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ que también es lineal y continua.

Demostración. El lado derecho $\langle w | Tx \rangle$ de la fórmula (4.17) es lineal y continua en x . De hecho, vale

$$|\langle w | Tx \rangle| \leq \|w\| \|Tx\| \leq \|w\| \|T\| \|x\|.$$

Del Teorema 4.23 de Riesz, se obtiene $\langle w | Tx \rangle = \langle y | x \rangle$ para algún $y \in \mathcal{H}$. Es evidente que la correspondencia $w \mapsto y$ es lineal; su continuidad sigue de la estimación:

$$\|y\| = \sup\{ |\langle y | x \rangle| : \|x\| \leq 1 \} = \sup\{ |\langle w | Tx \rangle| : \|x\| \leq 1 \} \leq \|w\| \|T\|.$$

Esto dice que $y = Sw$ para algún $S \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Además,

$$\langle Sw | x \rangle = \langle y | x \rangle = \langle w | Tx \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

y se introduce la notación $T^* := S$. □

Fíjese que la correspondencia $T \mapsto T^*$ es *semilineal*. Mediante dos instancias de (4.16) se obtiene:

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup\{ |\langle T^* w | x \rangle| : \|x\| \leq 1, \|w\| \leq 1 \} \\ &= \sup\{ |\langle w | Tx \rangle| : \|x\| \leq 1, \|w\| \leq 1 \} = \|T\|. \end{aligned}$$

¹¹ A la luz del teorema de Riesz, este es un caso particular de la fórmula (3.21) para elementos de \mathcal{K}^* ; pero aquí no es necesario invocar un corolario al teorema de Hahn y Banach.

Definición 4.27. Un operador lineal y continua $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se llama **proyector ortogonal** (o simplemente *proyector*) sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} si P es *idempotente y autoadjunto*:

$$P^2 = P = P^*.$$

Nótese que $1 - P$ es otro proyector ortogonal, porque $(1 - P)^2 = 1 - 2P + P = 1 - P$ y $(1 - P)^* = 1 - P^* = 1 - P$. \diamond

La geometría del espacio de Hilbert \mathcal{H} está determinada en gran parte por el juego de sus proyectores ortogonales: ellos corresponden con los subespacios cerrados de \mathcal{H} .

Proposición 4.28. Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , existe un único proyector ortogonal $P_M \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $P_M(\mathcal{H}) = M$ y $(1 - P_M)(\mathcal{H}) = M^\perp$.

Inversamente, si $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un proyector ortogonal, entonces $P(\mathcal{H})$ es un subespacio cerrado, con $P(\mathcal{H})^\perp = (1 - P)(\mathcal{H})$.

Demostración. Si M es un subespacio cerrado de \mathcal{H} , entonces por la Proposición 4.22 vale $\mathcal{H} \simeq M \oplus M^\perp$. Cada $x \in \mathcal{H}$ tiene una descomposición única $x = z + w$ con $z \in M$, $w \in M^\perp$; y además $\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$, por la demostración de esa proposición.

Defínase $P_M(x) := z$; está claro que $(1 - P_M)(x) = x - z = w$. También está claro que P_M es lineal, y la fórmula para $\|x\|^2$ muestra que $\|z\| \leq \|x\|$, de modo que P es continua con $\|P\| \leq 1$.

Además es evidente que $P_M(z) = z$, así que $P_M^2 = P_M$. Si $y \in \mathcal{H}$ con descomposición $y = u + v$ ($u \in M$, $v \in M^\perp$), entonces

$$\langle P_M y | x \rangle = \langle u | z + w \rangle = \langle u | z \rangle = \langle u + v | z \rangle = \langle y | P_M x \rangle \quad \text{para } x, y \in \mathcal{H};$$

esto comprueba que $(P_M)^* = P_M$.

Si $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un proyector ortogonal cualquiera y $w \in \mathcal{H}$, sea $u := Pw$. Entonces $Pu = P^2w = Pw = u$. La imagen de P es el subespacio

$$P(\mathcal{H}) = \{u \in \mathcal{H} : Pu = u\} = \{u \in \mathcal{H} : (1 - P)(u) = 0\} = \ker(1 - P),$$

así que $P(\mathcal{H})$ es cerrado porque $1 - P$ es continua.

Si $v \in P(\mathcal{H})^\perp$, entonces

$$\|Pv\|^2 = \langle Pv | Pv \rangle = \langle P^*v | Pv \rangle = \langle v | P^2v \rangle = \langle v | Pv \rangle = 0,$$

luego $Pv = 0$ y $(1 - P)v = v$. Esto dice que $P(\mathcal{H})^\perp \subseteq (1 - P)(\mathcal{H})$. Por otro lado,

$$\langle Py | (1 - P)x \rangle = \langle P^*y | (1 - P)x \rangle = \langle y | P(1 - P)x \rangle = 0 \quad \text{para } x, y \in \mathcal{H},$$

así que $(1 - P)(\mathcal{H}) \subseteq P(\mathcal{H})^\perp$.

Finalmente, la unicidad de P_M sigue porque $M = P(\mathcal{H}) = \ker(1 - P)$ y $M^\perp = (1 - P)(\mathcal{H})$ implican, para $z \in M$ y $w \in M^\perp$, que $Pz = z \in M$ y $Pw = P(1 - P)w = 0$; por lo tanto $P(z + w) = z = P_M(z + w)$. \square

4.3 Introducción a las series de Fourier

Una de las motivaciones principales para el estudio de los espacios de Hilbert abstractos fue la teoría clásica de las series de Fourier. En sus investigaciones sobre la propagación del calor, el ingeniero Joseph Fourier se vio obligado de desarrollar ciertas funciones, no como series de potencias (series de Taylor) sino como series de monomios trigonométricos. Tales series, por lo general, no convergen uniformemente en un intervalo compacto: la reconstrucción de una función dada a partir de sus componentes trigonométricos debe emprenderse con cuidado.

Definición 4.29. Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es **periódica** si existe $L > 0$ tal que

$$f(x + L) \equiv f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (4.18)$$

El mínimo valor L para que (4.18) se cumple se llama el **período** de la función f ; por convenio, una función constante tiene período L para todo $L > 0$. Obsérvese que f está determinada por sus valores en un intervalo $[a, a + L]$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$; generalmente se usan los intervalos $[0, L]$ y $[-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L]$. \diamond

Ejemplo 4.30. Las funciones trigonométricas $\sin \theta$ y $\cos \theta$ son periódicas con período 2π ; la función $\operatorname{tg} x$ es periódica con período π . Las funciones $t \mapsto \sin 2\pi t$ y $t \mapsto \cos 2\pi t$ son periódicas con período 1. Una función periódica con período L es también periódica con períodos $2L, 3L$, etcétera.

Ya se ha observado en el Ejemplo 3.53 que los polinomios trigonométricos

$$p(\theta) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta} \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (4.19)$$

son periódicas con período 2π . Conviene considerarlos como funciones $p: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $p(-\pi) = p(\pi)$. \diamond

Cada polinomio trigonométrico es continua en $[-\pi, \pi]$ y por ende pertenece al espacio de Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$. Del Ejemplo 4.18, se sabe que los *monomios trigonométricos*

$$u_k(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta}, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z},$$

constituyen una base ortonormal de $L^2([-\pi, \pi])$.

Los coeficientes c_k son entradas de una **sucesión bilateral** $c = \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con solo una cantidad finita de entradas no ceros. Ellas forman un espacio \mathbb{C} -vectorial $\mathbf{c}_{00}(\mathbb{Z})$. Análogamente al espacio $\mathbf{c}_{00} = \mathbf{c}_{00}(\mathbb{N})$ introducido anteriormente, se pueden imponer normas $\|\cdot\|_p$ sobre este espacio y completarlo para obtener espacios de Banach $\ell^p(\mathbb{Z})$ si $1 \leq p < \infty$. Solo hay

diferencias de notación entre estos $\ell^p(\mathbb{Z})$ y los espacios de Banach ℓ^p de la Definición 3.8. En particular, $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un espacio de Hilbert con la *base ortonormal estándar* $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, formado por las sucesiones bilaterales con una sola entrada no nula (de valor 1).

Definición 4.31. Sea $f \in C([-\pi, \pi])$. El k -ésimo coeficiente de Fourier de f es el valor de la integral

$$c_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle u_k | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(\theta) d\theta. \quad (4.20)$$

La igualdad de Parseval en $L^2([-\pi, \pi])$ garantiza que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle u_k | f \rangle|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

así que $c = \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y la correspondencia $f \mapsto \sqrt{2\pi} c$ extiende (por continuidad) a una isometría de $L^2([-\pi, \pi])$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$. \diamond

La existencia de la integral está garantizada por la continuidad de f : el integrando es R -integrable por ser continua. Ahora bien, si f es discontinua pero R -integrable con $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta < \infty$, entonces f representa un elemento de $L^1([-\pi, \pi])$; y la desigualdad triangular para integrales garantiza que

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{-ik\theta} f(\theta)| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1. \quad (4.21)$$

Por otro lado, la desigualdad de Schwarz en $L^2([-\pi, \pi])$ dice que

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \|f\|_2.$$

En consecuencia, se obtiene una inclusión¹² continua $L^2([-\pi, \pi]) \subset L^1([-\pi, \pi])$; la fórmula (4.20) sigue válida para todo $f \in L^2([-\pi, \pi])$.

¶ La teoría de las series de Fourier está plagada por factores de 2π o $\sqrt{2\pi}$, debido al período elegido. El convenio en (4.20) que define los c_k es una instancia de este fenómeno. La alternativa “francesa” es empezar con funciones periódicas de período 1 y usar el espacio de Hilbert $L^2([0, 1])$, con su base ortonormal $\tilde{u}_k(\theta) := e^{2\pi i k \theta}$, $k \in \mathbb{Z}$. En tal caso se puede definir los coeficientes $\tilde{c}_k := \int_0^1 e^{-2\pi i k \theta} f(\theta) d\theta$; el factor de 2π se traslada al exponente de los monomios trigonométricos. *De gustibus non disputandum est.* ¶

¹²Los espacios de Banach L^1 y L^2 han sido definidos como compleciones del espacio $C([-\pi, \pi])$; entonces $L^1([-\pi, \pi])$ no es parte $L^2([-\pi, \pi])$, en un sentido estricto. Sin embargo, cada sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_2$ es también de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_1$; esto implica que la inclusión $C([-\pi, \pi]) \subset L^1([-\pi, \pi])$ se extiende a una aplicación lineal e inyectiva $L^2([-\pi, \pi]) \hookrightarrow L^1([-\pi, \pi])$, cuya imagen es un subespacio denso de $L^1([-\pi, \pi])$. La estimación sobre las normas implica que esta inyección lineal es continua.

Definición 4.32. Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$. La **serie de Fourier** de f es la serie al lado derecho de la ecuación (4.10):

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle u_k | f \rangle u_k,$$

la cual converge en la norma $\|\cdot\|_2$ de $L^2([-\pi, \pi])$.

Si $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ está dada por (4.20), esta serie toma la forma $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik(\cdot)}$. \diamond

Desafortunadamente, la convergencia en la norma $\|\cdot\|_2$ no garantiza convergencia puntual. Para observar la distinción, considérese un desarrollo de Fourier *finito*, que no tiene problemas de convergencia. Este es el caso para un polinomio trigonométrico (4.19),

$$p(\theta) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-n}^n c_k u_k(\theta),$$

cuyos coeficientes c_k están calculados por la integral (4.20).

Cabe preguntarse, entonces, sobre la validez de la fórmula puntual:

$$f(\theta) \stackrel{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}, \quad \text{donde cada } c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(\theta) d\theta. \quad (4.22)$$

Al respecto, el Teorema 4.14 dice que las sumas parciales de la serie de Fourier para f aproximan la función f globalmente sobre $[-\pi, \pi]$ en el sentido de cuadrados mínimos.

En efecto, habida cuenta de que $\{u_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2([-\pi, \pi])$, la fórmula de Pitágoras (4.8) es aplicable. Para cada *suma parcial*

$$s_n(\theta) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta} \quad (4.23)$$

la siguiente estimación es válida:

$$\|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |\langle u_k | f \rangle|^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

La igualdad de Parseval entonces implica que $\|f - s_n\|_2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Además, por la Proposición 4.20, la cantidad $\|f - s_n\|_2$ representa la *mínima distancia* de la función f al subespacio (cerrado, al ser finitodimensional) $M_n := \text{lin}\langle u_k : k = -n, \dots, n \rangle$.

Por otro lado, el teorema de Stone y Weierstrass implica (véase los Ejemplos 3.53 y 4.18) que los polinomios trigonométricos son densos en $C([\pi, \pi])$. Se puede reformular la pregunta anterior así: si f es continua, ¿bajo cuáles circunstancias es posible obtener convergencia uniforme en el desarrollo (4.22)?

A la hora de abordar cálculos concretos con ejemplos, muchas veces es práctico usar los coeficientes a_k y b_k de (4.19). Fíjese que $a_0 = 2c_0$, mientras $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$ para $k \geq 1$. Estos coeficientes están elegidos de tal manera que

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta f(\theta) d\theta \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin k\theta f(\theta) d\theta \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Si $k \geq 1$, entonces

$$|a_k|^2 + |b_k|^2 = |c_k + c_{-k}|^2 + |c_k - c_{-k}|^2 = 2|c_k|^2 + 2|c_{-k}|^2.$$

Entonces la fórmula de Parseval se escribe así:

$$\|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2.$$

También es útil notar que

$$\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^n (\cos k\theta + i \sin k\theta) = \sum_{k=-n}^n \cos k\theta = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k\theta,$$

porque en la segunda suma los términos $\sin k\theta$ y $\sin(-k\theta)$ cancelan en pares.

Lema 4.33. Para $\theta \in \mathbb{R}$, la siguiente identidad es válida:

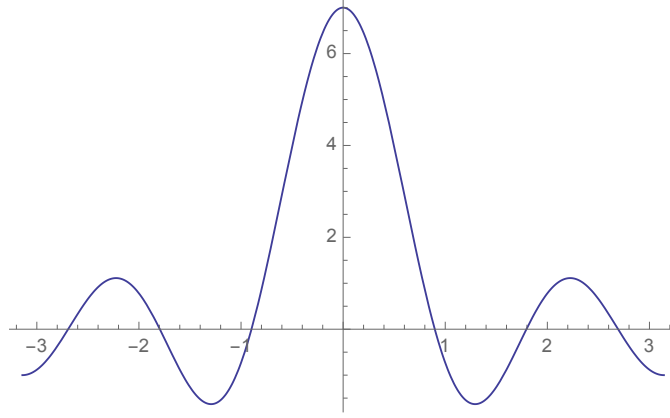
$$\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta},$$

donde, por continuidad, el lado derecho vale $(n + \frac{1}{2})$ en $\theta = 0$.

Demostración. Este es un cálculo trigonométrico elemental:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{1}{2}\theta \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\theta \right) &= \sin \frac{1}{2}\theta + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{1}{2}\theta \cos k\theta \\ &= \sin \frac{1}{2}\theta + \sum_{k=1}^n \sin(k + \frac{1}{2})\theta - \sin(k - \frac{1}{2})\theta \\ &= \sin(n + \frac{1}{2})\theta, \end{aligned}$$

con un colapso telescópico de la última suma. □

Figura 4.1: El núcleo de Dirichlet $D_3(\theta)$ para $\theta \in [-\pi, \pi]$

Definición 4.34. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $D_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$D_n(\theta) := \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \quad (4.24)$$

se llama el **núcleo de Dirichlet** de grado n . Es evidentemente una función *par* y periódica de período 2π . \diamond

Del Lema 4.33 se ve que cada D_n satisface

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) d\theta = 1.$$

En el intervalo $[-\pi, \pi]$, la función $D_n(\theta)$ alcanza su máximo en $\theta = 0$, donde $D_n(0) = 2n+1$. Fíjese que $D_n(\theta) > 0$ para $|\theta| < \pi/(n + \frac{1}{2})$; que la función par D_n tiene n ceros en el intervalo abierto $(0, \pi)$; y que D_n cambia de signo en cada uno de estos ceros. Este comportamiento oscilatorio está ilustrado en la Figura 4.1.

Lema 4.35. Sea $f \in C([-\pi, \pi])$, periódica de período 2π . La n -ésima suma parcial (4.23) de su serie de Fourier está dada por la integral

$$s_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta - \phi) f(\phi) d\phi. \quad (4.25)$$

Demostración. La suma parcial s_n se simplifica así:

$$\begin{aligned} s_n(\theta) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\theta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\phi} f(\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(\theta-\phi)} f(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta - \phi) f(\phi) d\phi. \end{aligned} \quad \square$$

Como D_n es una función par periódica y f es periódica, por hipótesis, el cambio de variable $\phi \mapsto \phi + \theta$ modifica la integral en (4.25) así:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\phi - \theta) f(\phi) d\phi = \int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} D_n(\phi) f(\theta + \phi) d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\phi) f(\theta + \phi) d\phi.$$

Ahora la cola de la serie de Fourier (para f continua y periódica) toma la forma

$$f(\theta) - s_n(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\phi) (f(\theta + \phi) - f(\theta)) d\phi,$$

donde se ha usado la relación $(1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) d\theta = 1$.

La función f es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$; entonces $|f(\theta + \phi) - f(\theta)| \leq \varepsilon$ para $|\phi| \leq \delta = \delta(\varepsilon)$. A la vez, $|D_n(\phi)|$ es pequeño fuera del intervalo $[-\delta, \delta]$ cuando n es grande. Se puede esperar que la estimación

$$|f(\theta) - s_n(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\phi)| |f(\theta + \phi) - f(\theta)| d\phi,$$

conduciría a la convergencia deseada $s_n(\theta) \rightarrow f(\theta)$. Desafortunadamente, los cambios de signo en $D_n(\theta)$ tienen un efecto acumulativo. Resulta que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\phi)| d\phi \sim \frac{8}{\pi} \log n \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

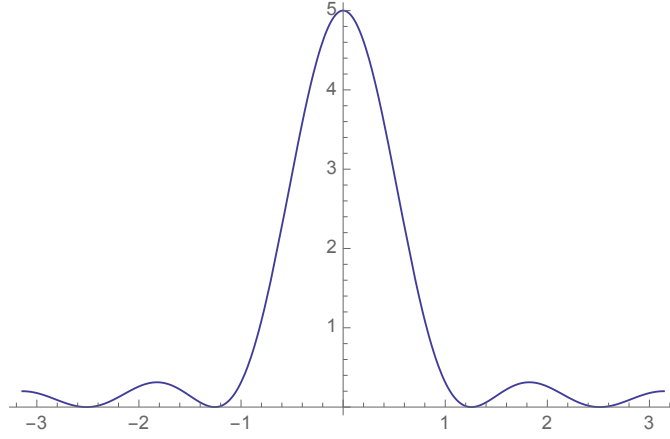
en marcado contraste con $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\phi) d\phi \equiv 2\pi$. Esto hace que la estimación anterior no conduce a una prueba de convergencia, ni siquiera puntual.¹³

► Una estrategia clásica para eludir estos problemas es la de *mejorar la convergencia* de la serie, usando la *sumabilidad en el sentido de Cesàro*. Dada una serie numérica con términos a_k y sumas parciales $s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, se trata de reemplazar cada suma parcial por la media aritmética de las sumas parciales iniciales:

$$t_n := \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

Es fácil verificar que si $s_n \rightarrow s$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $t_n \rightarrow s$ también. Pero la series divergentes (oscilantes) cuyas sumas parciales s_n no convergen, pero la sucesión $\{t_n\}$ sí converge: el ejemplo mejor conocido es la serie divergente $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$, para la cual $t_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

¹³Para estas propiedades de D_n , véase la sección 8.4 del libro de Duren. (Su definición de $D_n(\theta)$ difiere de (4.24) por un factor de $\frac{1}{2}$.)

Figura 4.2: El núcleo de Fejér $F_4(\theta)$ para $\theta \in [-\pi, \pi]$

Definición 4.36. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(\theta) := \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n D_m(\theta)$$

se llama el núcleo de Fejér de grado n . Al igual que el núcleo de Dirichlet, esta función es *par* y periódica de período 2π . \diamond

La media aritmética de las sumas parciales iniciales de la serie de Fourier (4.22) es

$$\begin{aligned} \underline{t_n(\theta)} &:= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n s_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta - \phi) f(\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\phi) f(\theta + \phi) d\phi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Lema 4.37. El núcleo de Fejér de grado n está dada por la fórmula explícita:

$$F_n(\theta) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(n+1)\theta}{(n+1) \sin^2 \frac{1}{2}\theta}. \quad (4.27)$$

Demostración. Es otro cálculo trigonométrico elemental, con una suma telescópica:

$$\begin{aligned} 2(n+1) \sin^2 \frac{1}{2}\theta F_n(\theta) &= 2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta \sum_{m=0}^n D_m(\theta) \\ &= \sum_{m=0}^n 2 \sin \frac{1}{2}\theta \sin(m + \frac{1}{2})\theta = \sum_{m=0}^n (\cos m\theta - \cos(m+1)\theta) \\ &= 1 - \cos(n+1)\theta = 2 \sin^2(\frac{1}{2}(n+1)\theta), \end{aligned} \quad \square$$

De la Definición 4.36, es evidente que el núcleo de Fejér F_n satisface

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) d\theta = 1. \quad (4.28)$$

En el intervalo $[-\pi, \pi]$, la función $F_n(\theta)$ alcanza su máximo en $\theta = 0$, donde $F_n(0) = n + 1$. Del numerador de la fracción (4.27), se ve que $F_n(\theta)$ tiene $\lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor$ ceros en el intervalo $(0, \pi]$ y muestra unas oscilaciones leves cuando se aleja de $\theta = 0$. Sin embargo, hay una diferencia notable entre sus grafos: *el núcleo de Fejér es no negativa en todo el intervalo*. Véase la Figura 4.2.

Teorema 4.38 (Fejér). *Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica de período 2π . Entonces su serie de Fourier es sumable en el sentido de Cesàro a la función original, donde la convergencia $t_n(\theta) \rightarrow f(\theta)$ es uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$.*

Demostración. La función continua f es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$, por la Proposición 1.40. Sea dado $\varepsilon > 0$; entonces existe $\delta \in (0, \pi)$ tal que $|f(\theta - \phi) - f(\theta)| < \varepsilon/3$ para todo θ cuando $|\phi| < \delta$.

En los intervalos $[\delta, \pi]$ y $[-\pi, -\delta]$, se cumple $\sin^2 \frac{1}{2}\theta \geq \sin^2 \frac{1}{2}\delta$ y por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} F_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(\theta) d\theta \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\delta} d\theta < \frac{\csc^2 \frac{1}{2}\delta}{2(n+1)}.$$

Entonces estas dos integrales tienden a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Usando (4.26) y (4.28), se obtiene

$$t_n(\theta) - f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\phi) (f(\theta + \phi) - f(\phi)) d\phi.$$

Esta integral es una suma $I = I_1 + I_2 + I_3$ de tres integrales sobre los intervalos respectivos $[-\pi, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ y $[\delta, \pi]$. Ahora, si $N(\varepsilon) \geq 3 \|f\|_{\infty} / \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2}\delta$, entonces

$$n \geq N(\varepsilon) \implies |I_3| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(\phi) |f(\theta + \phi) - f(\phi)| d\phi \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(\phi) d\phi < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nótese que se ha aprovechado la no negatividad de $F_n(\phi)$. De igual modo, se obtiene $|I_1| < \varepsilon/3$ para $n \geq N(\varepsilon)$. Además,

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(\phi) |f(\theta + \phi) - f(\phi)| d\phi \leq \frac{\varepsilon}{6\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(\phi) d\phi < \frac{\varepsilon}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\phi) d\phi = \frac{\varepsilon}{3}.$$

En resumen, se ha comprobado que

$$n \geq N(\varepsilon) \implies |t_n(\theta) - f(\theta)| < \varepsilon.$$

Esto dice que $t_n \rightarrow f$ uniformemente sobre $[-\pi, \pi]$. □

La continuidad de f en $[-\pi, \pi]$ no es suficiente para garantizar la convergencia de la serie de Fourier (4.22). Sin embargo, una condición suficiente es que f sea lipschitziana (véase el Ejercicio 1.15). Esto se verifica, por ejemplo, si f es de clase C^1 .

Definición 4.39. Una función continua y periódica $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es **localmente lipschitziana** en $\theta \in \mathbb{R}$ si existe $\delta = \delta(\theta) > 0$ tal que

$$|f(\theta + \phi) - f(\theta)| \leq L|\phi| \quad \text{cuando} \quad |\phi| \leq \delta \quad (4.29)$$

para alguna constante $L > 0$. \diamond

Proposición 4.40. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continua y periódica de período 2π . Supóngase que existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tal que f es localmente lipschitziana en θ . Entonces $s_n(\theta) \rightarrow f(\theta)$.

Demostración. El Lema 4.35 permite expresar la diferencia $s_n(\theta) - f(\theta)$ en la forma

$$\begin{aligned} s_n(\theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta - \phi) f(\phi) d\phi - f(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\phi) (f(\theta + \phi) - f(\theta)) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\phi) \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\phi d\phi \end{aligned}$$

al escribir, para $\phi \neq 0$,

$$h(\phi) := \frac{f(\theta + \phi) - f(\theta)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\phi}.$$

En vista de la hipótesis (4.29) (con $0 < \delta < \pi$, sin perder generalidad), es posible estimar $h(\phi)$ por

$$|h(\phi)| \leq \frac{L|\phi|}{|\operatorname{sen} \frac{1}{2}\phi|} \leq 2L, \quad \text{para} \quad |\phi| \leq \delta.$$

En $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$, se sabe que $|\operatorname{sen} \frac{1}{2}\phi| \geq |\operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta| > 0$. Entonces h cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(\phi)|^2 d\phi \leq \int_{-\delta}^{\delta} 4L^2 d\phi + \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} \frac{|f(\theta + \phi) - f(\theta)|^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\delta} d\phi < \infty$$

así que $h \in L^2([-\pi, \pi])$. [Mejor dicho, la función h representa un elemento de $L^2([-\pi, \pi])$, por ser de cuadrado integrable.]

La fórmula trigonométrica

$$\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\phi = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\phi \cos n\phi + \cos \frac{1}{2}\phi \operatorname{sen} n\phi$$

permite expresar $s_n(\theta) - f(\theta)$ en la forma

$$s_n(\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (h(\phi) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\phi \cos n\phi + h(\phi) \cos \frac{1}{2}\phi \operatorname{sen} n\phi) d\phi = \frac{a'_n + b''_n}{2},$$

donde los a'_n y b''_n son coeficientes de Fourier de $h(\phi) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\phi$ y $h(\phi) \cos \frac{1}{2}\phi$, respectivamente.

Estas dos funciones están en $L^2([-\pi, \pi])$ también. Sus series de Fourier son de cuadrado sumable, por la fórmula de Parseval. En particular, se deduce que $a'_n \rightarrow 0$, $b''_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego $s_n(\theta) \rightarrow f(\theta)$. \square

Ejemplo 4.41. Considérese la función escalonada

$$g(\theta) := \llbracket 0 < \theta < \pi \rrbracket - \llbracket -\pi < \theta < 0 \rrbracket,$$

extendida periódicamente al dominio \mathbb{R} – fíjese que $g(\pi) = g(-\pi) = 0$ y $g(0) = 0$, por definición. Sus coeficientes de Fourier son: cada $a_k = 0$ porque la función g es impar; y

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin k\theta g(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\theta d\theta = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) = \frac{4}{k\pi} \llbracket k \text{ impar} \rrbracket.$$

Por la Proposición 4.40, se concluye que

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\theta}{2m+1} = g(\theta), \quad \text{cuando } \theta \notin \pi\mathbb{Z}.$$

Esta serie converge también cuando $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, y su suma es 0 en $\theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

Ahora bien, si se redefinen los valores de $g(\theta)$ en $\theta = 0, \pm\pi$, esto no afecta el cálculo de los coeficientes a_k, b_k . Los valores de la suma de la serie de Fourier en los saltos de esta función discontinua son los valores medios de cada salto. Por ejemplo, la función $\tilde{g}(\theta) := \llbracket 0 \leq \theta < \pi \rrbracket - \llbracket -\pi \leq \theta < 0 \rrbracket$, extendido periódicamente, posee la misma serie de Fourier, cuyas sumas parciales $s_n(n\pi)$ no convergen a $\tilde{g}(n\pi) = (-1)^n$ en los puntos de discontinuidad. \diamond

Considérese una función periódica f cuyas únicas discontinuidades son saltos; es decir, para cada $\theta \in \mathbb{R}$ estas límites unilaterales existen:

$$f(\theta+) := \lim_{\phi \downarrow 0} f(\theta + \phi), \quad f(\theta-) := \lim_{\phi \downarrow 0} f(\theta - \phi).$$

El salto de f en θ es la diferencia $f(\theta+) - f(\theta-)$, si esta diferencia no es cero. Se enuncia el siguiente resultado sin demostración.

Teorema 4.42 (Dirichlet). Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica de período 2π y suave por trozos, con un salto en $\theta \in (-\pi, \pi]$. Entonces la serie de Fourier de f converge en θ y su suma en ese punto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\theta) = \frac{f(\theta+) + f(\theta-)}{2}. \quad \square$$

4.4 Apéndice: el (otro) teorema de representación de Riesz

El Teorema 4.23, notado por Frigyes Riesz en 1907 y más tarde reformulado para espacios de Hilbert generales, recibe el nombre de *teorema de representación de Riesz*: identifica, para una forma lineal continua sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , un elemento $y \in \mathcal{H}$ que *representa* la forma lineal mediante la fórmula $x \mapsto \langle y | x \rangle$. Poco antes, el propio Hilbert obtuvo esa representación para el espacio de sucesiones ℓ^2 ; y también en 1907, Maurice Fréchet lo hizo para el espacio $L^2([0, 2\pi])$, con una construcción explícita del representante por medio de su serie de Fourier.¹⁴ Por eso, el Teorema 4.23 se llama a veces el *teorema de Riesz y Fréchet*.

Hay otro teorema de representación, también debido a Riesz (esta vez sin Fréchet), que identifica representantes para las formas lineales continuas sobre el espacio de Banach $C([a, b])$. Esta vez, los propios elementos de $C([a, b])$ proporcionan algunas de las formas lineales continuas, pero no todas.

Ejemplo 4.43. Sea $g \in C([a, b])$. Defínase $\chi_g \in C([a, b])^*$ por

$$\langle \chi_g, f \rangle := \int_a^b g(t) f(t) dt. \quad (4.30)$$

La desigualdad triangular para integrales implica que

$$|\langle \chi_g, f \rangle| \leq \int_a^b |g(t)| |f(t)| dt \leq \|g\|_1 \|f\|_\infty,$$

donde $\|g\|_1 := \int_a^b |g(t)| dt$. Está claro que χ_g es lineal y continua, con $\|\chi_g\| \leq \|g\|_1$. No es difícil verificar que $\|\chi_g\| = \|g\|_1$ en general. Entonces g representa χ_g aunque con otra norma que la norma $\|\cdot\|_\infty$ de $C([a, b])$.

Una conjetura natural, a esta altura, sería que los elementos de $L^1([a, b])$ representan $C([a, b])^*$ – aunque falta construir esos elementos explícitamente. Pero esa conjetura es *falsa*: las formas lineales que siguen no corresponden a elementos de $L^1([a, b])$.

Tómese $s \in [a, b]$. La *evaluación* $\phi_s : f \mapsto f(s)$ es claramente lineal y continua:

$$|\langle \phi_s, f \rangle| = |f(s)| \leq \|f\|_\infty.$$

Entonces $\|\phi_s\| = 1$ (para obtener la igualdad, basta tomar f constante, no nula). No hay función continua g alguna que represente ϕ_s mediante la integral (4.30): sería necesario que $g(t) = 0$ para $t \in [a, s) \cup (s, b]$, de donde $g(t) \equiv 0$. Sucede lo mismo si se toma $g \in L^1([a, b])$. \diamond

¹⁴El artículo en cuestión es: Maurice R. Fréchet, *Sur les opérations linéaires (troisième note)*, Transactions of the American Mathematical Society 8 (1907), 433–446.

La solución al problema de representar las evaluaciones puntuales es usar una versión extendida de la integral de Riemann, introducido en 1894 por Thomas Jan Stieltjes: consiste en reemplazar el integrador dt (en la notación práctica de Leibniz) por un integrador $d\alpha(t)$, donde α es una función de variación acotada sobre $[a, b]$.

Definición 4.44. Una función $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tiene **variación acotada** si hay una constante $M \geq 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \leq M, \quad \text{para toda partición } \mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \text{ de } [a, b].$$

El mínimo M – el supremo de estas sumas sobre toda \mathcal{P} – es la **variación total** $V_a^b(\alpha)$. \diamond

Es fácil comprobar que α tiene variación acotada sobre $[a, b]$ si y solo si $\Re \alpha, \Im \alpha$ tienen variaciones acotadas sobre $[a, b]$. Para el resto de esta sección, se supondrá que α es *real*.

Si $a < b < c$, la unión de una partición \mathcal{P} de $[a, b]$ y una partición $\mathcal{Q} = \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ de $[b, c]$ es una partición $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ de $[a, c]$. (Nótese que $a = t_0, t_n = b = s_0, s_m = c$.) Entonces

$$V_a^b(\alpha) + V_b^c(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| + \sup_{\mathcal{Q}} \sum_{j=1}^m |\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})| \leq V_a^c(\alpha).$$

Por otro lado, cualquier partición de $[a, c]$ puede ser refinado a una partición $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ al insertar el nodo b si hiciera falta. Luego $V_a^c(\alpha)$ puede calcularse tomando el supremo sobre particiones de la forma $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$; esto muestra la igualdad:

$$V_a^b(\alpha) + V_b^c(\alpha) = V_a^c(\alpha) \quad \text{cuando } a < b < c.$$

Lema 4.45 (Jordan). Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variación acotada. Entonces $\alpha = g - h$ donde $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones crecientes acotadas.

Demostración. Defínase $g(t) := V_a^t(\alpha)$ para $a \leq t \leq b$, usando el convenio $V_a^a(\alpha) := 0$. Si $s \leq t$ en $(a, b]$, cualquier partición \mathcal{P} de $[a, s]$ puede ser prolongada en una partición \mathcal{P}' de $[a, t]$; entonces está claro que $g(s) \leq g(t)$.

Ahora sea $h(t) := g(t) - \alpha(t)$ para $a \leq t \leq b$. Si $s \leq t$ en $(a, b]$, entonces

$$h(t) - h(s) = V_a^t(\alpha) - \alpha(t) - V_a^s(\alpha) + \alpha(s) = V_s^t(\alpha) - (\alpha(t) - \alpha(s)) \geq 0,$$

así que $h(s) \leq h(t)$. \square

Esta **descomposición de Jordan** de α en una diferencia de dos funciones crecientes no es única. Por ejemplo, si c es una función constante, entonces $\alpha = (g + c) - (h + c)$ es otra diferencia de funciones crecientes. Además, si hay un *salto* de g en un punto $s \in [a, b]$, se puede redefinir $g(s)$ a cualquier valor en el intervalo $[g(s-), g(s+)]$, con un ajuste correspondiente en $h(s)$. Estos cambios no afectan el valor de la integral que se define a continuación.

Definición 4.46. Sea $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente acotada; y sea $f \in C([a, b])$. Usando la notación de la Definición 1.39, se puede definir sumas inferior y superior con respecto a una partición \mathcal{P} por:

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}, g) := \sum_{i=1}^n m_i(f) (g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad \bar{S}(f, \mathcal{P}, g) := \sum_{i=1}^n M_i(f) (g(t_i) - g(t_{i-1})).$$

Al refinar la partición \mathcal{P} y al usar la continuidad de f , resulta que estas cotas convergen a un límite intermedio,¹⁵ la integral de Riemann y Stieltjes de f con respecto a g :

$$\int_a^b f(t) dg(t) := \sup_{\mathcal{P}} \underline{S}(f, \mathcal{P}, g) = \inf_{\mathcal{P}} \bar{S}(f, \mathcal{P}, g).$$

Ahora bien, si α es una función real de variación acotada, con descomposición de Jordan $\alpha = g - h$, se define la integral de Riemann y Stieltjes de f con respecto a α por:

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) := \int_a^b f(t) dg(t) - \int_a^b f(t) dh(t).$$

Es posible comprobar que las ambigüedades en $\alpha = g - h$ no cambian el valor de esta diferencia. \diamond

Una función creciente $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser discontinua, con saltos en ciertos puntos de $[a, b]$. El número de saltos con $g(s+) - g(s-) \geq 1/n$ es finito, porque el salto total no es mayor que $g(b) - g(a)$. Entonces solo puede haber saltos en un juego *numerable* de puntos de $[a, b]$. Por el Lema 4.45, una función de variación acotada sobre $[a, b]$ también posee una cantidad numerable de saltos.

Entonces se puede domesticar la diferencia $\alpha = g - h$, al pedir dos condiciones más:

- (a) $\alpha(a) = 0$; y
- (b) α es continua desde la derecha: $\alpha(t) = \alpha(t+)$ para todo $t \in [a, b)$.

Una función de variación acotada que cumple (a) y (b) se llama **normalizada**; ellas forman un *espacio normado* $NBV([a, b])$, con la norma $\|\alpha\| := V_a^b(\alpha)$. Si se exige que g, h también cumplen las condiciones (a) y (b), la descomposición de Jordan $\alpha = g - h$ es única.

¹⁵La continuidad de f no es indispensable; si las cotas referidas convergen a un límite común, dícese que f es integrable en el sentido de Riemann y Stieltjes. Históricamente, la integral de Lebesgue ha superado esta noción, para funciones discontinuas.

Ejemplo 4.47. Dado un punto $s \in [a, b]$, defínase $\alpha_s(t) := \llbracket s \leq t \leq b \rrbracket$. Entonces α_s es creciente y normalizada. Dada una partición \mathcal{P} de $[a, b]$, hay un único índice j tal que $s \in [t_j, t_{j+1})$, excepto si $s = b = t_n$. Si $f \in C([a, b])$, entonces $\underline{S}(f, \mathcal{P}, g) = m_j(f)$ y $\bar{S}(f, \mathcal{P}, g) = M_j(f)$. Al refinar \mathcal{P} , se obtiene $m_j(f) \uparrow f(s)$, $M_j(f) \downarrow f(s)$ por la continuidad de f , así que

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = f(s) = \langle \phi_s, f \rangle.$$

(Este resultado sigue válido en el caso $s = b$, $\alpha_b(t) = \llbracket t = b \rrbracket$, porque cualquier partición \mathcal{P} contiene el nodo $t_n = b$.) \diamond

El segundo teorema de representación de Riesz identifica el espacio dual de $C([a, b])$. En primer lugar, cada $\alpha \in NBV([a, b])$ define una forma lineal ϕ_α sobre $C([a, b])$ por:

$$\langle \phi_\alpha, f \rangle := \int_a^b f(t) d\alpha(t). \quad (4.31)$$

Sea $\alpha = g - h$ la descomposición de Jordan normalizada. La desigualdad triangular (en \mathbb{R}) muestra que $\bar{S}(f, \mathcal{P}, g) \leq \bar{S}(|f|, \mathcal{P}, g)$ para cada partición \mathcal{P} , ya que $g(t_i) - g(t_{i-1}) \geq 0$. De ahí se obtiene la desigualdad triangular para integrales:

$$\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \int_a^b |f(t)| dg(t) \leq \|f\|_\infty V_a^b(g). \quad (4.32)$$

En consecuencia, la expresión (4.31) es continua en f , con

$$\left| \int_a^b f(t) d\alpha(t) \right| = \left| \int_a^b f(t) dg(t) - \int_a^b f(t) dh(t) \right| \leq (V_a^b(g) + V_a^b(h)) \|f\|_\infty.$$

Para obtener una mejor cota para la norma, se puede notar que en una partición \mathcal{P} dada, los valores $\alpha(t_i)$ en los nodos suben y bajan. Sea $\eta_i := \text{signo}(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})) \in \{-1, 0, +1\}$ y tómesese

$$\tilde{f}(t) := \sum_{i=1}^n \eta_i \llbracket t_{i-1} \leq t < t_i \rrbracket + \eta_n \llbracket t = b \rrbracket. \quad (4.33)$$

Nótese que \tilde{f} es una función escalonada,¹⁶ con valores en $\{-1, 0, +1\}$, con $\|\tilde{f}\|_\infty = 1$ (excepto si $\alpha(t) \equiv 0$, donde $\tilde{f}(t) \equiv 0$ también). Aunque \tilde{f} no es continua en general, las sumas inferior y superior coinciden:

$$\underline{S}(\tilde{f}, \mathcal{P}, \alpha) = \bar{S}(\tilde{f}, \mathcal{P}, \alpha) = \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

¹⁶Una función escalonada sobre $[a, b]$ es una función que es constante en un juego finito de subintervalos y nodos aislados de $[a, b]$. Si también es continua desde la derecha, el único posible nodo aislado es el extremo b .

Dado $\varepsilon > 0$, hay una partición $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ tal que esta suma es mayor que $V_a^b(\alpha) - \varepsilon$ para $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}(\varepsilon)$ – fíjese que \tilde{f} depende de \mathcal{P} .

Como \tilde{f} generalmente no es continua, se debe ampliar $C([a, b])$ al espacio normado $B([a, b])$ de funciones de la forma $f_1 + f_2$, donde f_1 es continua y f_2 es una función escalonada, continua desde la derecha o desde la izquierda. Se usa la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $B([a, b])$, así que $C([a, b])$ es un subespacio cerrado. Todos los elementos de $B([a, b])$ son integrables en el sentido de Riemann y Stieltjes. Si $\alpha \neq 0$, la construcción anterior produce un elemento $\tilde{f} \in B([a, b])$ tal que

$$\int_a^b \tilde{f}(t) d\alpha(t) \geq V_a^b(\alpha) - \varepsilon, \quad \text{mientras} \quad \|f\|_\infty = 1.$$

Entonces la fórmula (4.31) produce una forma lineal continua sobre $B([a, b])$, cuya norma es $V_a^b(\alpha)$.

► Lo que falta por ver es que cada elemento de $C([a, b])^*$ está dada por un integral de Riemann y Stieltjes, de tipo (4.31).

Teorema 4.48 (Riesz). *Si $\phi \in C([a, b])^*$, hay una única función $\alpha \in NBV([a, b])$ tal que $\langle \phi, f \rangle = \int_a^b f(t) d\alpha(t)$. Por lo tanto, hay un isomorfismo isométrico $C([a, b])^* \simeq NBV([a, b])$.*

Demostración. Dado $\phi \in C([a, b])^*$, el Teorema 3.37 de Hahn y Banach produce una forma lineal continua $\tilde{\phi} \in B([a, b])^*$ tal que $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|$.

Si $s \in [a, b]$, considérese la función escalonada $f_s \in B([a, b])$ dada por

$$f_s(t) := \llbracket a \leq t \leq s \rrbracket, \quad \text{y defínase} \quad \alpha(s) := \langle \tilde{\phi}, f_s \rangle. \quad (4.34)$$

Tómese una partición $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, y defínase $\tilde{f} \in B([a, b])$ nuevamente por la fórmula (4.33). Fíjese que

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i (f_{t_i}(t) - f_{t_{i-1}}(t)),$$

y en consecuencia, vale

$$\langle \tilde{\phi}, \tilde{f} \rangle = \sum_{i=1}^n \eta_i (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

Ahora $\|\tilde{f}\|_\infty \leq 1$, así que $|\langle \tilde{\phi}, \tilde{f} \rangle| \leq \|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|$. Se deduce que

$$\sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \leq \|\phi\| \quad \text{para toda partición } \mathcal{P},$$

así que α es una función de variación acotada, con $V_a^b(\alpha) \leq \|\phi\|$.

Ahora tómese $g \in C([a, b])$ y considérese la partición \mathcal{P} de nuevo. Defínase

$$h(t) := g(a) \llbracket t = a \rrbracket + \sum_{i=1}^n g(t_{i-1})(f_{t_i}(t) - f_{t_{i-1}}(t)).$$

Esta $h \in B([a, b])$ es una “aproximación escalonada” para g . Es evidente que

$$|g(t) - h(t)| = |g(t) - g(t_{i-1})| \quad \text{para } t \in (t_{i-1}, t_i]$$

y $|g(a) - h(a)| = 0$. Además,

$$\langle \tilde{\phi}, h \rangle = \sum_{i=1}^n g(t_{i-1})(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})).$$

Como g es uniformemente continua sobre $[a, b]$, para $\varepsilon > 0$ dado hay $\delta > 0$ tal que $\max\{t_i - t_{i-1}\} < \delta$ implica $\|g - h\|_\infty \leq \varepsilon$. Entonces, si $\mathcal{Q}(\delta)$ es una partición con subintervalos de longitudes no mayores que δ , se concluye que

$$\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}(\delta) \implies |\langle \phi, g \rangle - \langle \tilde{\phi}, h \rangle| \leq \varepsilon \|\phi\|,$$

y de ahí se obtiene la representación:

$$\langle \phi, g \rangle = \int_a^b g(t) d\alpha(t).$$

De la desigualdad (4.32) y la discusión subsiguiente, esta fórmula conlleva la estimación $|\langle \phi, g \rangle| \leq V_a^b(\alpha) \|g\|_\infty$. Se concluye que $\|\phi\| = V_a^b(\alpha)$. \square

La demostración dada¹⁷ tiene la virtud de definir la función α directamente, al usar funciones escalonadas. La definición parece ambigua, porque la extensión de ϕ a $\tilde{\phi}$ no es única. Sin embargo, al restar la constante $\alpha(a)$ y al ajustar los posibles saltos para obtener continuidad desde la derecha, la versión “normalizada” de α sí es única.

Pero esta demostración no podría ser la de Riesz, porque su artículo¹⁸ es anterior al teorema de Hahn y Banach! Resulta que Riesz construyó su función de variación acotada *a partir de funciones continuas únicamente*. A continuación, se ofrece un bosquejo de su construcción.

¹⁷Esta demostración está adaptada del Teorema 4.32-B del libro: Angus E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley, New York, 1958. Este es quizás el último texto de análisis que ofrece una demostración “clásica” al teorema de representación de Riesz, sin apelar a la teoría de medida.

¹⁸Es una nota de menos de 4 páginas, en 1909: Frigyes Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **149** (1909), 974–977.

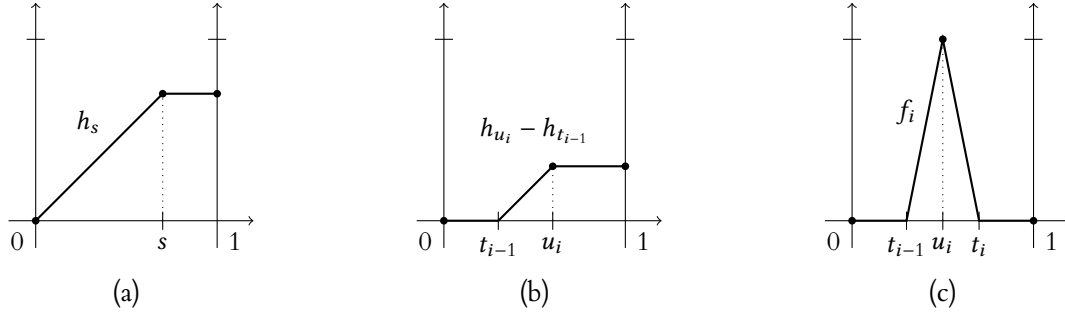


Figura 4.3: Algunas funciones en la demostración de Riesz

Riesz trabajó con el intervalo estándar $[a, b] = [0, 1]$. Sea dada una forma lineal continua ϕ sobre $C([0, 1])$. Para $s \in [0, 1]$, considérese la función continua en la Figura 4.3(a):

$$h_s(t) := \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq s, \\ s & \text{si } s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y defínase

$$A(s) := \langle \phi, h_s \rangle. \quad (4.35)$$

Tómese una partición $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[0, 1]$. Esta vez, se considera los signos

$$\eta_i := \text{signo}(A(t_i) - A(t_{i-1})) = \text{signo}(\langle \phi, h_{t_i} \rangle - \langle \phi, h_{t_{i-1}} \rangle).$$

Escríbase $u_i := \frac{1}{2}(t_{i-1} + t_i)$ para denotar los puntos medios de los intervalos de la partición. Fíjese que

$$h_{u_i}(t) - h_{t_{i-1}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_{i-1} \\ t - t_{i-1} & \text{si } t_{i-1} \leq t \leq u_i \\ u_i - t_{i-1} & \text{si } u_i \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una función continua creciente: Figura 4.3(b).

Ahora defínase una función continua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por las condiciones: $f(t_i) = 0$ en cada nodo t_i ; $f(u_i) := \eta_i$; en cada subintervalo $[t_{i-1}, u_i]$ o $[u_i, t_i]$, f es “lineal” (es decir, afín). Entonces $f = f_1 + \dots + f_n$, donde f_i se anula fuera de $[t_{i-1}, t_i]$ y su grafo es un “sombrero” con un pico en u_i [la Figura 4.3(c) muestra un caso con $\eta_i = +1$].

Entonces $\|f\|_\infty \leq 1$, con

$$\begin{aligned} \langle \phi, f \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \phi, f_i \rangle = \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\langle \phi, h_{u_i} - h_{t_{i-1}} \rangle}{u_i - t_{i-1}} - \frac{\langle \phi, h_{t_i} - h_{u_i} \rangle}{t_i - u_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2}{t_i - t_{i-1}} |A(t_i) - 2A(u_i) + A(t_{i-1})|. \end{aligned}$$

Esto implica, para una partición \mathcal{P} cualquiera, que

$$\sum_{i=1}^n \frac{|A(t_i) - 2A(u_i) + A(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} \leq \frac{\|\phi\|}{2}.$$

De ahí, Riesz concluye que las derivadas unilaterales $D_r A(t) := \lim_{h \downarrow 0} (A(t+h) - A(t))/h$ y $D_l A(t) := \lim_{h \downarrow 0} (A(t) - A(t-h))/h$ existen y definen funciones de variación acotada. Se puede tomar $\alpha(t) := D_r A(t)$, por ejemplo. Luego de hacer los ajustes necesarios al restar una constante y cambiar sus valores en los saltos – de los cuales podría haber una cantidad numerable – se obtiene una función $\alpha \in NBV([0, 1])$ tal que $\langle \phi, f \rangle = \int_0^1 f(t) d\alpha(t)$ para todo $f \in C([0, 1])$.

Si la función $A(t)$ fuera diferenciable, se podría aplicar el teorema de valor medio, con $\alpha(t) := A'(t)$, para simplificar la última ecuación en

$$\sum_{i=1}^n |\alpha(v_i) - \alpha(w_i)| \leq \|\phi\|,$$

donde $t_{i-1} < w_i < u_i < v_i < t_i$ para $i = 1, \dots, n$. Esto implicaría de modo más directo que α es de variación acotada con $V_0^1(\alpha) \leq \|\phi\|$. En general, no se puede esperar que A sea diferenciable, pero la misma conclusión se puede extraer de las derivadas unilaterales.

Es evidente que la definición directa de $\alpha(t)$ por la fórmula (4.34) es más sencilla, al precio de ir más allá de las funciones continuas. Sin embargo, la esencia del teorema no exige ese precio: Riesz logró su meta con una dosis de astucia, al usar la función $A(t)$.

*Raffiniert ist der Herrgott,
aber boshaf ist er nicht.*

– Albert Einstein (1921)

Ejercicios

Ejercicios sobre análisis en \mathbb{R}

Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente, su cota superior mínima o **supremo** $s \in \mathbb{R}$ se escribe $s = \sup A$. Por la construcción de \mathbb{R} , $\sup A \in \mathbb{R}$ existe.¹ Si $B \subset \mathbb{R}$ es acotado inferiormente, su cota inferior máxima o **ínfimo** $r \in \mathbb{R}$ se escribe $r = \inf B$.

Ejercicio 1.1. Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente, con $s = \sup A$, y si $\varepsilon > 0$, comprobar que existe $t \in A$ con $t > s - \varepsilon$.

Ejercicio 1.2. Si $E \subseteq \mathbb{R}$, escríbase $-E := \{-t : t \in E\}$. Si $B \subset \mathbb{R}$ es acotado inferiormente, demostrar que $\inf B$ existe y que $\inf B = -\sup(-B)$.

Ejercicio 1.3. Usar la propiedad del supremo de \mathbb{R} para deducir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ no es acotado superiormente. Concluir que \mathbb{R} es arquimediano, es decir, que si $a \in \mathbb{R}$ entonces hay $n \in \mathbb{N}$ con $a < n$.

Ejercicio 1.4. Si $t \in \mathbb{R}$, demostrar que existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq t < n + 1$. (Se suele escribir $n = \lfloor t \rfloor$.)

Ejercicio 1.5. Demostrar la fórmula de de Moivre: $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^m = \cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta$, para $m = p/q \in \mathbb{Q}$ un número racional.

Ejercicio 1.6. (a) Demostrar que $a \leq b \leq c$ o bien $c \leq b \leq a$ en \mathbb{R} si y sólo si $|a - b| + |b - c| = |a - c|$.

(b) Demostrar que $|v - z| + |z - w| = |v - w|$ para $v, w, z \in \mathbb{C}$ si y solo si hay $t \in [0, 1]$ tal que $z = (1 - t)v + tw$. [Indicación: considerar primero el caso $z = 0$.]

Ejercicio 1.7. Dada una función $f: X \rightarrow Y$, verificar las siguientes correspondencias entre partes $A, A_1, A_2 \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$.

$$(a) \quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

$$(b) \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

$$(c) \quad f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(X) \subseteq Y.$$

$$(d) \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(Y) = X, \quad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

¹Esta propiedad del supremo implica que \mathbb{R} es completo. Sin embargo, hay una definición alternativa de completitud (la convergencia de sucesiones de Cauchy), para cuerpos no necesariamente ordenados, que no implica la propiedad del supremo.

(e) Resulta que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, con igualdad si f es inyectiva.

(f) Resulta que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, con igualdad si f es sobreyectiva.

En los ejercicios que siguen, I denota un intervalo de \mathbb{R} y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en I .

Ejercicio 1.8. Si $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función continua en $t_0 \in I$, demostrar que la suma $f + g: t \mapsto f(t) + g(t)$ es también continua en t_0 .

Ejercicio 1.9. Si $f(I) = J$ y si $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en J , demostrar que la composición $h \circ f: t \mapsto h(f(t))$ es continua en I .

Ejercicio 1.10. (a) Defínase $|f|: I \rightarrow [0, \infty)$ por $|f|(t) := |f(t)|$. Comprobar que la función $|f|$ es también continua en I .

(b) Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas con un dominio común I , defínase

$$\underline{f \vee g}(t) := \max\{f(t), g(t)\}, \quad \underline{f \wedge g}(t) := \min\{f(t), g(t)\} \quad \text{para } t \in I.$$

Comprobar que las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$ son también continuas en I .

Ejercicio 1.11. (a) Usar la desigualdad $|\sin t| \leq |t|$ para comprobar que la función sen es continua en $t_0 = 0$. Deducir que sen es continua en todo \mathbb{R} .

(b) Demostrar que la función $h(t) := t \sin(1/t)$ $\llbracket t \neq 0 \rrbracket$ es continua en $t_0 = 0$. ¿Es h una función continua en todo \mathbb{R} ?

Ejercicio 1.12. Demostrar una función continua $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tiene un *punto fijo*, es decir, que existe $c \in [0, 1]$ con $f(c) = c$. \llbracket Indicación: considerar $g(t) := f(t) - t$. \rrbracket

Ejercicio 1.13. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, con $f(a) < f(b)$, demostrar que f es estrictamente creciente en $[a, b]$.

Ejercicio 1.14. Comprobar que la función $f(t) := 1/(1+t^2)$ es uniformemente continua en todo \mathbb{R} . \llbracket Indicación: comparar $|f(s) - f(t)|$ con $|s - t|$. \rrbracket

Ejercicio 1.15. (a) Una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es *lipschitziana* en I si hay una constante $L \geq 0$ tal que

$$|f(s) - f(t)| \leq L |s - t| \quad \text{para todo } t \in I.$$

Comprobar que f es uniformemente continua en I .

(b) Demostrar que la función $g(t) := \sqrt{t}$ es uniformemente continua en $[0, \infty)$ pero que no es lipschitziana en $[0, \infty)$.

Ejercicio 1.16. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y si $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión convergente, con $x_{n_k} \rightarrow \ell$ cuando $k \rightarrow \infty$, demostrar que $x_n \rightarrow \ell$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Ejercicio 1.17. (a) Dados dos números reales a, b con $0 < a < b$, defínase dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ inductivamente, por $a_0 := a$, $b_0 := b$, y

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Comprobar que $a_n < b_n$ por inducción; y que las dos sucesiones convergen a un mismo límite: existe $\mu \in (a, b)$ tal que $a_n \rightarrow \mu$ y $b_n \rightarrow \mu$ cuando $n \rightarrow \infty$.

(b) Este límite común se llama la **media aritmética-geométrica** de a y b , a veces denotado $AGM(a, b) := \mu$. Calcular $AGM(1, 2)$ con una exactitud de 10 cifras decimales.

Ejercicio 1.18. Considérese la sucesión

$$a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Demostrar que esta sucesión converge² a un límite ℓ tal que $\ell \leq 1$.

Ejercicio 1.19. (a) Demostrar que una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ **no es** uniformemente continua en I si y solo si existen $\varepsilon_1 > 0$ y dos sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ en I con $|s_n - t_n| \leq 1/n$ pero $|f(s_n) - f(t_n)| > \varepsilon_1$.

(b) Comprobar que la función continua $f(t) := \operatorname{tg} t$ no es uniformemente continua en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(c) La función $t \mapsto \log t$ es continua³ en el intervalo $(0, \infty)$. ¿Es esta función *uniformemente* continua o no en dicho intervalo?

Ejercicio 1.20. Si $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ es una función continua y biyectiva, con *función inversa* $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ dada por $g(s) = t \iff f(t) = s$, demostrar que g es también continua sobre $[c, d]$.

[[Indicación: supóngase que $s_n \rightarrow s$ en $[c, d]$ pero $t_n \not\rightarrow t$ en $[a, b]$; luego usar el teorema de Bolzano y Weierstrass.]]

Ejercicio 1.21. Una sucesión de funciones $\{f_n: I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **uniformemente de Cauchy** sobre el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq M \implies \|f_m - f_n\|_I < \varepsilon.$$

Demostrar que $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy sobre I si y solo si $\{f_n\}$ es uniformemente convergente sobre I .

²Aunque el ejercicio no pide calcular el límite, ¿podrá usted obtener el valor de ℓ ?

³Aquí $\log t = \log_e t$ denota el logaritmo “natural” o napieriano. La antigua notación $\ln t$ es obsoleta.

Ejercicio 1.22. Demostrar que una sucesión de funciones $\{f_n: I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge uniformemente sobre I a una función límite $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si y solo si para algún $\varepsilon_1 > 0$ existen una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ y una sucesión $\{t_k\}$ en I tales que $|f_{n_k}(t_k) - f(t_k)| \geq \varepsilon_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.23. Considérese las siguientes funciones definidas sobre el intervalo $[0, \infty)$:

$$(a) \quad f_n(t) := \frac{t^2 + nt}{n}, \quad (b) \quad g_n(t) := \frac{t^n}{1 + t^n}, \quad (c) \quad h_n(t) := \frac{t^n}{1 + t^{2n}}.$$

Hallar las funciones $f, g, h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$, $h_n \rightarrow h$ puntualmente sobre $[0, \infty)$. Determinar, en cada caso, si la convergencia es uniforme sobre $[0, \infty)$.

En los casos en que esta convergencia no es uniforme, comprobar que sí hay convergencia uniforme sobre un intervalo finito $[0, b]$.

Ejercicio 1.24. (a) Defínase una sucesión de funciones $\{f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ por

$$f_n(t) := (n - n^2|t - \frac{1}{n}|) \mathbb{I}[|t - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n}].$$

Graficar las funciones f_1, f_2, f_3 . Demostrar que $f_n \rightarrow 0$ puntualmente sobre $[0, 2]$, y comprobar que esta convergencia no es uniforme, al verificar que $\int_0^2 f_n(t) dt \rightarrow 0$.

(b) Defínase una sucesión de funciones $\{g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ por

$$g_n(t) := n^2 t(1 - t^2)^n.$$

Demostrar que $g_n \rightarrow 0$ puntualmente sobre $[0, 1]$. Calcular $\int_0^1 g_n(t) dt$ y luego comprobar que la convergencia de la sucesión $\{g_n\}$ no es uniforme sobre $[0, 1]$.

Ejercicio 1.25. Para $t \in [-1, 1]$, evaluar la suma de la serie:

$$s(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^2}{(1 + t^2)^k}.$$

Determinar si esta serie converge uniformemente o no sobre $[-1, 1]$.

Ejercicio 1.26. Mostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} t^k(1 - t)$ converge puntualmente para $t \in [0, 1]$, pero no uniformemente.

Ejercicio 1.27. (a) Comprobar que las funciones $f_n(t) := |t|^{(n+1)/n} \equiv (t^2)^{(n+1)/2n}$, para $n \geq 1$, son diferenciables en el intervalo $(-1, 1)$.

- (b) Demostrar que $f_n(t) \rightarrow |t|$ uniformemente sobre $(-1, 1)$, pero que las derivadas $f'_n(t)$ no convergen uniformemente sobre $(-1, 1)$.

Ejercicio 1.28. Si $f_k(t) := \frac{\sin(k^2 t)}{k^2}$ para $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ converge uniformemente sobre $[0, \infty)$, pero que la serie de derivadas $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(t)$ diverge para algunos valores de t .

Ejercicio 1.29. Demostrar que la función definido por la serie

$$h(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4}$$

es dos veces diferenciable sobre \mathbb{R} .

[[Indicación: calcular $h'(t)$ y $h''(t)$ formalmente, al derivar la serie término por término. Demostrar que la serie para $h''(t)$ converge uniformemente sobre \mathbb{R} ; y luego retroceder.]]

Ejercicio 1.30. Considérese la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$g(t) := e^{-1/t^2} \quad \llbracket t > 0 \rrbracket.$$

Verificar directamente que esta función es de clase C^3 sobre \mathbb{R} , con las siguientes derivadas:

$$g'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}, \quad g''(t) = \frac{-6t^2 + 4}{t^6} e^{-1/t^2}, \quad g'''(t) = \frac{24t^4 - 36t^2 + 8}{t^9} e^{-1/t^2}.$$

[[Se debe tener especial cuidado con las derivadas en $t = 0$.]]

En seguida, demostrar por inducción sobre k que existen polinomios p_k de grado k tales que, para cada $k \geq 1$:

$$g^{(k)}(t) = p_{k-1}(t^2) t^{-3k} e^{-1/t^2} \quad \text{para } t > 0.$$

Concluir que g es una función suave (es decir, de clase C^∞) sobre \mathbb{R} .

Ejercicio 1.31. (a) Si g es la función definida en el Ejercicio 1.30 y si $\delta > 0$, defínase $g_\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_\delta(s) := \frac{g(s)}{g(\delta - s) + g(s)} \quad \text{para } s \in \mathbb{R}.$$

Comprobar que g_δ es suave sobre \mathbb{R} , que $g_\delta(s) \equiv 0$ si $s \leq 0$, $g_\delta(s) \equiv 1$ si $s \geq \delta$, y que $0 \leq g_\delta(s) \leq 1$ para $0 \leq s \leq \delta$.

(b) Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado finito, con $b - a > 2\delta$, defínase

$$h(t) := g_\delta(t - a)g_\delta(b - t) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que h es suave sobre \mathbb{R} , que $h(t) \equiv 1$ para $t \in [a + \delta, b - \delta]$, $h(t) \equiv 0$ para $t \notin (a, b)$, y que $0 \leq h(t) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

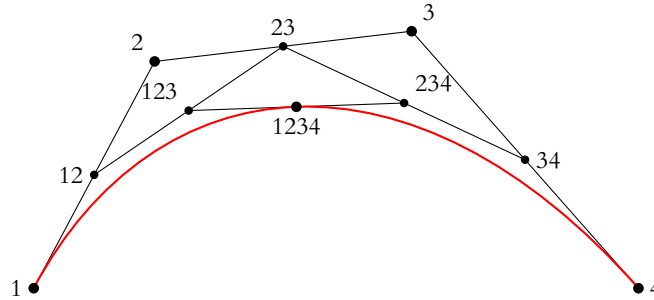
Ejercicio 1.32. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^{n+1} sobre un intervalo abierto $I = (t_0 - R, t_0 + R)$. Verificar la fórmula integral del resto del polinomio de Taylor de grado n para $f(t)$ alrededor de $t = t_0$:

$$R_{f,n}(t) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t (t - s)^n f^{(n+1)}(s) ds.$$

[[Indicación: Aplicar integración por partes al lado derecho.]]

Ejercicio 1.33. (a) Sea $f_3(t) := t^3$ para $t \in \mathbb{R}$. Calcular los polinomios de Bernstein $B_n(f_3; t)$ para $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demostrar directamente (sin invocar el teorema de Weierstrass) que $B_n(f_3; t) \rightarrow t^3$ uniformemente sobre $[0, 1]$ cuando $n \rightarrow \infty$.



Ejercicio 1.34. Muchos programas informáticos de dibujo usan curvas de Bézier para conectar dos píxeles $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_4 = (x_4, y_4)$ en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ con una curva cúbica, con direcciones tangentes preasignadas en los puntos inicial y final. Para tal efecto, se establecen dos puntos de control z_2 y z_3 , las direcciones $z_1 \rightarrow z_2$ y $z_3 \rightarrow z_4$ dan vectores tangentes en z_1 y z_4 respectivamente.

El algoritmo siguiente localiza un píxel intermedio z_{1234} en la curva deseada:⁴

$$\begin{aligned} z_{12} &:= \frac{1}{2}(z_1 + z_2); & z_{23} &:= \frac{1}{2}(z_2 + z_3); & z_{34} &:= \frac{1}{2}(z_3 + z_4); \\ z_{123} &:= \frac{1}{2}(z_{12} + z_{23}); & z_{234} &:= \frac{1}{2}(z_{23} + z_{34}); & z_{1234} &:= \frac{1}{2}(z_{123} + z_{234}). \end{aligned}$$

⁴Tomado del libro: Donald E. Knuth, *The METAFONTbook*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1986. El algoritmo fue propuesto en 1959 por Paul de Casteljau, pero luego fue atribuido erróneamente al ingeniero Pierre Bézier.

En seguida, se repita el proceso, con las sustituciones

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1, z_{12}, z_{123}, z_{1234}) \quad \text{y} \quad (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_{1234}, z_{234}, z_{34}, z_4)$$

respectivamente. Esto produce dos pixeles más en la curva deseada. Al continuar la iteración k veces, se obtienen $2^k + 1$ pixeles (contando los dos originales), suficientes para pintar la curva con unas cuantas iteraciones.

Ahora bien: sea $t \mapsto z(t)$ la función continua que parametriza la curva así obtenida para $0 \leq t \leq 1$, con $z(0) := z_1$, $z(1) := z_4$, $z(\frac{1}{2}) := z_{1234}$, etcétera, donde los pixeles obtenidos en el paso $\#k$ designan $z(m/2^k)$ con m impar. Comprobar que $z(t)$ es un polinomio de Bernstein, al obtener una fórmula explícita para $z(t)$ en términos de z_1, z_2, z_3 y z_4 .

¶ Como consecuencia, la curva de Bézier queda dentro de la envoltura convexa de los cuatro puntos originales. ¶

Ejercicios sobre espacios métricos

En los ejercicios que siguen, (X, ρ) y (Y, σ) denotan espacios métricos.

Ejercicio 2.1. (a) Demostrar que la función $f(t) := t/(1+t)$ es una biyección continua entre $(0, \infty)$ y $(0, 1)$, cuya función inversa también es continua.

(b) Si (X, ρ) es un espacio métrico, defínase

$$\tilde{\rho}(x, y) := \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Comprobar que $\tilde{\rho}$ es otra métrica sobre X .

(c) Demostrar que los espacios métricos (X, ρ) y $(X, \tilde{\rho})$ son *equivalentes*, esto es, que poseen los mismos conjuntos abiertos.

Ejercicio 2.2. Si $E \subseteq X$, defínase la métrica inducida $\rho|_E$ sobre E por restricción; es decir, $\rho|_E(x, y) := \rho(x, y)$ cuando $x, y \in E$.

Si $B \subseteq E$, demostrar que B es abierto en $(E, \rho|_E)$ si y solo si $B = E \cap A$ para algún $A \subseteq X$ tal que A es abierto en (X, ρ) .

Ejercicio 2.3. (a) Los límites de sucesiones son únicos: si $\{x_n\}$ es una sucesión en X tal que $x_n \rightarrow x$ y también $x_n \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$, verificar que $x = y$.

(b) Demostrar que una parte $C \subseteq X$ es cerrado en X si y solo si $x \in C$ toda vez que haya una sucesión $\{x_n\}$ en C tal que $x_n \rightarrow x$ en X .

Ejercicio 2.4. Se construye el conjunto de Cantor $C \subset [0, 1]$ por el algoritmo siguiente. Sea $C_0 := [0, 1]$; y sea $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Por inducción sobre k , si $C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} [a_j, b_j]$ se define

$$C_{k+1} := \bigcup_{j=1}^{2^k} \left[a_j, \frac{2a_j + b_j}{3} \right] \cup \left[\frac{a_j + 2b_j}{3}, b_j \right].$$

Luego se define $C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$.

Demostrar que el complemento $[0, 1] \setminus C$ es abierto y denso en $[0, 1]$.

Ejercicio 2.5. Demostrar que las siguientes condiciones sobre $f: X \rightarrow Y$ son equivalentes:

- (a) la función f es continua en X ;
- (b) $f(x_n) \rightarrow f(x)$ en Y toda vez que $x_n \rightarrow x$ en X ;
- (c) $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ para todo $E \subseteq X$.

Ejercicio 2.6. (a) Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: X \rightarrow Y$ son dos funciones continuas, demostrar que el conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X .

(b) Si E es denso en X y si $f(x) = g(x)$ para $x \in E$, concluir que las funciones f y g coinciden sobre todo X .

Ejercicio 2.7. Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y si $x_0 \in X$ es tal que $f(x_0) > 0$, demostrar que $f(x) > 0$ para todo x en un vecindario de x_0 en X .

Ejercicio 2.8. Denótese por $M_2(\mathbb{R})$ en espacio de matrices 2×2 con entradas en \mathbb{R} , con la métrica euclidiana obtenida de la identificación usual de $M_2(\mathbb{R})$ con \mathbb{R}^4 .

El grupo de matrices invertibles en $M_2(\mathbb{R})$ se denota por $GL(2, \mathbb{R})$. Demostrar que $GL(2, \mathbb{R})$ es abierto y denso en $M_2(\mathbb{R})$.

En los ejercicios que siguen, $K \subseteq X$ denota un conjunto compacto, y $F \subseteq X$ denota un conjunto cerrado.

Ejercicio 2.9. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en X con $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, comprobar que el conjunto $\{z\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto.

Ejercicio 2.10. Demostrar que un espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 2.11. La distancia desde un punto $x \in X$ y una parte $A \subseteq X$ se define por

$$d(x, A) := \inf \{ \rho(x, y) : y \in A \}.$$

- (a) Comprobar que $d(x, A) = 0$ si y solo si $x \in \overline{A}$.

- (b) Demostrar que la función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := d(x, A)$ es uniformemente continua sobre X , esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\rho(y, z) < \delta \implies |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

- Ejercicio 2.12.** (a) Si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia encajada de cerrados no vacíos en X , es decir, $F_n \supseteq F_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n , y si F_0 es compacto, demostrar que $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.
- (b) Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado con $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$. Si $x \notin F$, demostrar que hay un punto $z \in F$ tal que $\rho(x, z) = d(x, F)$.

Ejercicio 2.13. La distancia entre dos partes $A, B \subseteq X$ se define por:

$$\underline{d}(A, B) := \inf \{ \rho(x, y) : x \in A, y \in B \}.$$

- (a) Si K es compacto y F es cerrado en X , con $K \cap F = \emptyset$, demostrar que hay $\delta > 0$ tal que $\rho(x, y) \geq \delta$ para $x \in K, y \in F$; concluir que $d(K, F) > 0$.
- (b) Dar un ejemplo de dos cerrados $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ pero $d(F_1, F_2) = 0$.
- (c) Dar un ejemplo de dos cerrados $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ pero $d(F_1, F_2) = 0$.

Ejercicio 2.14. Sean $A, B \subseteq X$ dos cerrados con $A \cap B = \emptyset$. Defínase $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Comprobar que g es continua en X , con $0 \leq g(x) \leq 1$ y que $A = f^{-1}(\{0\})$ y $B = f^{-1}(\{1\})$. Demostrar que hay dos abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ejercicio 2.15. Demostrar que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si cada función continua $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.

Ejercicio 2.16. Si $K \subseteq X$ es un conjunto compacto y si $f: X \rightarrow Y$ es continua, demostrar que f es uniformemente continua sobre K : dado $\varepsilon > 0$, hallar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x, z \in K \text{ con } \rho(x, z) < \delta \implies \sigma(f(x), f(z)) < \varepsilon.$$

[[Indicación: usar la Proposición 2.25 de Lebesgue.]]

Ejercicio 2.17. Dicese que un espacio métrico (X, ρ) es localmente compacto si cada punto $x \in X$ posee un vecindario compacto.

- (a) Demostrar que (X, ρ) es localmente compacto si y solo si para cada $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola cerrada $\bar{B}(x; \varepsilon)$ es compacto.

- (b) Si $F \subseteq X$ es cerrado y X es localmente compacto, comprobar que F también es localmente compacto.

Ejercicio 2.18. Una aplicación biyectiva $f: X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo** si f es continua y si su función inversa $g: Y \rightarrow X$ es también continua.

- (a) Comprobar que una biyección $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si y solo si f es continua y C cerrado en X implica que $f(C)$ es cerrado en Y .
- (b) Si X es compacto y $f: X \rightarrow Y$ es una biyección continua, demostrar que f es un homeomorfismo.

Ejercicio 2.19. Demostrar que la función $t \mapsto s := t/(1 - |t|)$ es un homeomorfismo entre el intervalo $(-1, 1)$ y la recta \mathbb{R} . Hallar una fórmula de tipo $t = g(s)$ para la función inversa. Concluir que cualquier bola abierta $B(x; r)$ en \mathbb{R}^n es homeomorfa a todo \mathbb{R}^n .

Ejercicio 2.20. Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es **contractiva** si existe $r \in (0, 1)$ con

$$\sigma(f(x), f(y)) < r \rho(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Obsérvese que f es uniformemente continua.

Sea (X, ρ) un espacio métrico completo. Si $f: X \rightarrow X$ es una aplicación contractiva de X en sí mismo, demostrar que f posee un *punto fijo* $z \in X$ tal que $f(z) = z$.

[[Indicación: tómese $x_0 \in X$ cualquiera, y defínase una sucesión $\{x_n\}$ en X inductivamente por $x_{n+1} := f(x_n)$. Si $m > n$ en \mathbb{N} , demostrar que $\rho(x_m, x_n) \leq s \rho(x_1, x_0)$ donde $s = r^{n-1}/(1 - r)$.]]

Comprobar también que el punto fijo z es único.

Ejercicio 2.21 (Teorema de Baire). Sea (X, ρ) un espacio métrico completo. Cada familia numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ de abiertos densos en X tiene intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ densa en X .

Mostrar que la siguiente construcción conduce a una demostración del teorema de Baire. Sea V un abierto cualquiera en X . Verificar que $V \cap U_1$ incluye una bola cerrada $\overline{B}(x_1; r_1)$. En seguida, comprobar que $V \cap U_2 \cap B(x_1; r_1)$ incluye una bola cerrada $\overline{B}(x_1; r_1)$ de radio $r_2 < \frac{1}{2}r_1$.

Luego, por inducción sobre $k \in \mathbb{N}^*$, demostrar que el conjunto $V \cap U_{k+1} \cap B(x_k; r_k)$ incluye una bola cerrada $\overline{B}(x_{k+1}; r_{k+1})$ de radio $r_{k+1} < \frac{1}{2}r_k$.

Comprobar que la sucesión $\{x_n\}$ así construida es una sucesión de Cauchy, cuyo límite z pertenece a $V \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Ejercicio 2.22. Dícese que una parte $A \subseteq X$ es **nunca denso** en X si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X (o equivalentemente, si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$).

Dícese que una parte $B \subseteq X$ es **magro** en X si $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es una unión numerable de partes nunca densas.⁵

- (a) Mostrar que \mathbb{Q} es a la vez denso y magro en \mathbb{R} .
- (b) Comprobar que un espacio métrico completo no es magro en sí.
 [Indicación: usar el Ejercicio 2.21.]
- (c) Concluir que \mathbb{R} no es numerable.

Ejercicio 2.23. Si $E \subseteq X$ es conexo, comprobar que su clausura \bar{E} también es conexo.

Ejercicio 2.24. El componente conexo de un punto $x \in X$ es la unión de todas las partes conexas $E \subseteq X$ tales que $x \in E$. Mostrar que el componente conexo de x es efectivamente un conjunto conexo; de hecho, es el mayor conjunto conexo que contiene x .

Verificar que el componente conexo de x es cerrado.

¿Cuál es el componente conexo de un número racional r en \mathbb{Q} ?

Ejercicio 2.25. Sea $O(n)$ el conjunto de matrices ortogonales $n \times n$:

$$O(n) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = 1_n \}.$$

Como parte de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ – las entradas de la matriz son sus coordenadas cartesianas – demostrar que $O(n)$ es compacto pero no es conexo.

Ejercicios sobre espacios normados

Ejercicio 3.1. Sea $(E^\#, \rho^\#)$ la compleción del espacio métrico (E, ρ) , construida en el Teorema 2.44. Demostrar que la fórmula $\|\underline{x}\| := \rho^\#(\underline{0}, \underline{x})$ define una norma sobre $E^\#$, que satisface $\rho^\#(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$ para todo $\underline{x}, \underline{y} \in E^\#$.

Ejercicio 3.2. Este ejercicio proporciona una demostración alternativa de la desigualdad de Young: si $1 < p < \infty$ y $q - 1 = 1/(p - 1)$, entonces $st \leq s^p/p + t^q/q$ para todo $s, t > 0$.

- (a) Para $t > 0$ fijo, sea $f(s) := st - s^p/p$. Demostrar que hay $\delta > 0$ tal que $f(s) > 0$ para $s \in (0, \delta)$ mientras $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = -\infty$. Concluir que hay $s_0 > 0$ tal que $f'(s_0) = 0$ y $f(s_0) = \sup\{f(s) : s > 0\}$.
- (b) Evaluar s_0 y expresar $f(s_0)$ como función de t . Concluir que $f(s) \leq t^q/q$.

⁵El término *magro* fue introducido por Bourbaki. Baire clasificó las partes de un espacio topológico como *de primera categoría* (los conjuntos magros) y *de segunda categoría* (todos los demás). Nada tiene que ver con la “teoría de categorías”; por eso, es más recomendable la terminología de Bourbaki.

Ejercicio 3.3. Sea \underline{c}_{00} el espacio vectorial de sucesiones en \mathbb{C} con un número finito de entradas distintos de 0. Sea $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \underline{c}_{00}$ la sucesión cuya entrada $\#k$ es 1 y las demás entradas 0. Comprobar que $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ es una base vectorial de \underline{c}_{00} .

- (a) Sea \underline{c}_0 el espacio vectorial de sucesiones en \mathbb{C} que convergen a 0. Mostrar que \underline{c}_0 es un espacio de Banach y que \underline{c}_{00} es un subespacio denso en \underline{c}_0 .
- (b) Mostrar que \underline{c}_{00} es también un subespacio denso en ℓ^p para $1 \leq p < \infty$.
- (c) Demostrar que los espacios de Banach \underline{c}_0 y ℓ^p , para $1 \leq p < \infty$, son separables.

Ejercicio 3.4. Demostrar que el espacio de Banach $C([0, 1])$ es separable.

Ejercicio 3.5. Demostrar que el espacio de Banach ℓ^∞ no es separable.

[[Indicación: Exhibir una familia no numerable $\{x_\alpha : \alpha \in J\}$ de vectores en ℓ^∞ tales que cada $\|x_\alpha\|_\infty = 1$ pero $\|x_\alpha - x_\beta\|_\infty = 1$ para $\alpha \neq \beta$.]]

Ejercicio 3.6. Sea $1 \leq p < r < \infty$.

- (a) Demostrar que $\|x\|_r \leq \|x\|_p$ para $x \in \underline{c}_{00}$. Concluir que $\ell^p \subset \ell^r$ y demostrar que esta inclusión es estricta.

[[Indicación: Para ver que $\ell^p \neq \ell^r$, considerar la serie armónica $\sum_{k \geq 0} 1/(k+1)$.]]

- (b) Demostrar que $\|f\|_p \leq \|f\|_r$ si $f \in C([0, 1])$ y concluir que $L^r([0, 1]) \subseteq L^p([0, 1])$. ¿Es esta una inclusión estricta?

[[Indicación: si $s = r/p$, usar la desigualdad de Hölder para mostrar la relación $\int_0^1 |f(t)|^p dt \leq (\int_0^1 |f(t)|^r dt)^{1/s}$ para $f \in C([0, 1])$.]]

Ejercicio 3.7. Sea E un espacio normado y sean F, G dos subespacios vectoriales de E .

- (a) Si F tiene dimensión finita, demostrar que F es un subespacio *cerrado* de E .
- (b) Si G incluye una bola abierta $B(x; r)$ de E , mostrar que $G = E$.
- (c) Si E es un espacio de Banach, demostrar que $\dim E$ es finito o no numerable.

[[Indicación: usar el Ejercicio 2.22, corolario al teorema de Baire, para mostrar que un espacio normado de dimensión numerable no puede ser completo.]]

Ejercicio 3.8. Sea $B = B(0; 1)$ la bola abierta unitaria del espacio normado E . Comprobar que B posee las siguientes propiedades geométricas:

- (a) B es *convexa*: si $x, y \in B$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $(1-t)x + ty \in B$;
- (b) B es *equilibrada*: si $x \in B$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$, entonces $\alpha x \in B$;

(c) B es absorbente: si $z \in E$, hay algún $t > 0$ tal que $tz \in B$;

(d) B es limitada: si $z \in E$, entonces $\{t > 0 : tz \in B\}$ es un intervalo finito $(0, t_0)$.

Inversamente, si un conjunto $A \subset E$ es convexo, equilibrado, absorbente y limitado, se define su **calibrador de Minkowski** por:

$$p_A(x) := \inf\{s > 0 : s^{-1}x \in A\} \in [0, \infty).$$

Demostrar que p_A es una *norma* sobre E y que $A = \{x \in E : p_A(x) < 1\}$.

Ejercicio 3.9. Sea $p \in (1, \infty)$, $q = p/(p-1)$, y sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto de \mathbb{R} . Completar el Ejemplo 3.11, al demostrar las desigualdades de Hölder y Minkowski para $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$, $h \in \mathcal{L}^q(I)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t)h(t)| dt &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |h(t)|^q dt \right)^{1/q}, \\ \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

[[Indicación: usar la desigualdad de Young $cd \leq c^p/p + d^q/q$ con $c = |f(t)|$, $d = |h(t)|$; luego adaptar las demostraciones de los Lemas 3.6 y 3.7 a este caso.]]

Ejercicio 3.10 (Lema de Riesz). Sea F un subespacio cerrado del espacio normado E . Si $0 < \varepsilon < 1$, demostrar que existe $z \in E$ tal que⁶

$$\|z\| = 1 \quad \text{y} \quad d(z, F) \geq 1 - \varepsilon.$$

[[Indicación: tómese $x \in E \setminus F$ y verificar que hay $u \in F$ tal que $\|x - u\| \leq d(x, F)/(1 - \varepsilon)$. Si $v \in F$, usar el vector $y := u + \|x - u\|v$ para comprobar que $z := (x - u)/\|x - u\|$ satisface $\|z - v\| \geq 1 - \varepsilon$.]]

Ejercicio 3.11. Si E es un espacio normado con $\dim E = \infty$, demostrar que la bola unitaria cerrada $\overline{B}(0; 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ *no es compacta*. Concluir que el teorema de Heine y Borel no es válido en espacios normados infinitodimensionales.

[[Indicación: usar el Ejercicio 3.7(a) y el Lema de Riesz para construir inductivamente una sucesión $\{x_n\}$ en $\overline{B}(0; 1)$ tal que $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ para $m \neq n$.]]

⁶En un espacio de Hilbert, se puede obtener $\|z\| = 1$ y $d(z, F) = 1$. En espacios normados más generales, solo se puede asegurar una distancia levemente menor que 1.

Ejercicio 3.12. Sea $1 < p < \infty$ y $q = p/(p-1)$. Verificar que la fórmula

$$\langle y, x \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_k \quad \text{para } y \in \ell^q, x \in \ell^p,$$

define una aplicación bilineal $\ell^q \times \ell^p \rightarrow \mathbb{C}$. Usar esta fórmula para construir una biyección isométrica entre el espacio dual $(\ell^p)^*$ y ℓ^q . Esto establece un isomorfismo $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$. Concluir que $(\ell^p)^{**} \simeq \ell^p$, es decir, que ℓ^p es reflexivo.

En los ejercicios que siguen, E, F, G son espacios normados; $\mathcal{L}(E, F)$ es el espacio de aplicaciones lineales continuas de E en F ; $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$; y $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ es el espacio dual de E .

Ejercicio 3.13. Si E_0 es un subespacio denso de E ; si F es un espacio de Banach; y si $T_0: E_0 \rightarrow F$ es una aplicación lineal tal que $\|T_0 x\| \leq M \|x\|$ para todo $x \in E_0$, demostrar que hay una *única* extensión de T_0 a una aplicación lineal continua $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\|T\| \leq M$.

Ejercicio 3.14. (a) Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{C})$ define un operador lineal $x \mapsto Ax$ sobre el espacio normado $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$. Verificar que la fórmula

$$\|A\|_{p \rightarrow p} := \sup \{ \|Ax\|_p : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_p \leq 1 \}$$

define una norma sobre $M_n(\mathbb{C})$, para $1 \leq p \leq \infty$.

(b) Comprobar las igualdades⁷

$$\|A\|_{1 \rightarrow 1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_{\infty \rightarrow \infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

(c) Encontrar $B \in M_2(\mathbb{C})$ tal que las tres normas $\|B\|_{1 \rightarrow 1}$, $\|B\|_{2 \rightarrow 2}$, $\|B\|_{\infty \rightarrow \infty}$ son distintas.

Ejercicio 3.15. (a) Un operador lineal $S \in \mathcal{L}(E)$ es **idempotente** si $S^2 = S$. Si $S \neq 0$, mostrar que $\|S\| \geq 1$.

(b) Encontrar un idempotente $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ tal que $\|S\| > 1$. [Indicación: se toma $E = \mathbb{C}^2$ con la norma euclidiana usual; la matriz de S es una matriz 2×2 idempotente.]

Ejercicio 3.16. En este problema, $E = C([0, 1])$ y ϕ, χ, ψ son formas lineales sobre E .

(a) Si $t_0 \in [0, 1]$, mostrar que $\langle \phi, f \rangle := f(t_0)$ define $\phi \in E^*$ y calcular $\|\phi\|$.

⁷Estas son las normas por sumas de columnas [resp., filas] introducidas en el Ejemplo 3.24.

(b) Comprobar que $\langle \chi, f \rangle := \int_0^1 f(t) dt$ define $\chi \in E^*$ y calcular $\|\chi\|$.

(c) Si $f \neq g$ en $C([0, 1])$, encontrar $\psi \in E^*$ con $\psi(f) \neq \psi(g)$.

Ejercicio 3.17. Sea $\mathcal{B}(E, F; G)$ el espacio vectorial de las aplicaciones *bilineales* continuas $B: E \times F \rightarrow G$. Comprobar que la fórmula

$$\|B\| := \sup\{ \|B(x, y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \}$$

define una norma en $\mathcal{B}(E, F; G)$.

Demostrar que hay un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(E, F; G)$ y $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$.

Ejercicio 3.18. Si $S \in \mathcal{L}(E, F)$, su *transpuesta* es la aplicación lineal $S^T: F^* \rightarrow E^*$ definida por

$$\langle S^T w, x \rangle := \langle w, Sx \rangle \quad \text{para } w \in F^*, x \in E.$$

(a) Verificar que S^T es continua, así que $S^T \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$.

[[Indicación: el lado derecho es bilineal en (w, x) .]]

(b) Demostrar que $\|S^T\| = \|S\|$.

[[Indicación: usar el Corolario 3.39 al teorema de Hahn y Banach.]]

Ejercicio 3.19. (a) Demostrar que una aplicación bilineal continua $B: E \times F \rightarrow G$ es diferenciable en cada punto $(x, y) \in E \times F$; y que su derivada en ese punto es la aplicación *lineal* continua

$$B'(x, y) : (u, v) \mapsto B(x, v) + B(u, y).$$

(b) Demostrar de la *composición* de aplicaciones lineales $(T, S) \mapsto S \circ T$ define una aplicación diferenciable $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$. Verificar que su derivada en (T, S) es la aplicación lineal $(U, V) \mapsto S \circ U + V \circ T$.

Ejercicio 3.20. Si $f: U \rightarrow F$ es una aplicación diferenciable definida en un abierto $U \subseteq E$, su aplicación tangente $Tf: U \times E \rightarrow F \times F$ está definida por

$$Tf(x, u) := (f(x), f'(x)u).$$

Si $g: V \rightarrow G$ es otra diferenciable definida en un abierto $V \subseteq F$ tal que $f(U) \subseteq V$, demostrar que la regla de la cadena para f y g es equivalente a la propiedad homomórfica de aplicaciones tangentes:

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf : U \times E \rightarrow G \times G.$$

En los ejercicios que siguen, (K, ρ) y (L, σ) son espacios métricos compactos. $C(K) = C(K, \mathbb{C})$ denota el espacio de Banach de funciones continuas $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ con la norma $f \mapsto \|f\|_\infty$.

Ejercicio 3.21. (a) Demostrar que cualquier $f \in C([0, \pi])$ es el límite uniforme de “polinomios en $\cos \theta$ ”, es decir, funciones de la forma $\theta \mapsto p(\cos \theta)$ donde p es un polinomio con coeficientes en \mathbb{C} .

(b) Demostrar que cualquier $f \in C([0, \pi])$ es el límite uniforme de polinomios trigonométricos pares, es decir, funciones de la forma

$$q(\theta) := a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 3.22. Demostrar que el espacio de Banach $C(K)$ es separable cuando el espacio métrico K es compacto.

[[Indicación: se sabe que K es separable, por el Ejercicio 2.10; sea A una parte numerable densa de K . Considérese las funciones de la forma $g_n(x) := d(x, K \setminus B_n)$ donde los B_n son bolas abiertas con centros en A y radios en \mathbb{Q} . Demostrar que estas funciones separan los puntos de K .]]

Ejercicio 3.23. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto, denótese por $C^\infty([a, b])$ la totalidad de funciones continuas $f \in C([a, b])$ tales que f es de clase C^∞ en el intervalo abierto (a, b) . Demostrar que $C^\infty([a, b])$ es denso en $C([a, b])$.

Ejercicio 3.24. Si $t_0 \in [a, b]$ y si $f \in C([a, b])$ satisface $f(t_0) = 0$, demostrar que hay una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ con $p_n(t_0) = 0$ para cada n , tal que $p_n(t) \rightarrow f(t)$ uniformemente sobre $[a, b]$.

[[Indicación: agregar una constante.]]

Ejercicio 3.25. (a) El producto cartesiano $K \times L$ es un espacio métrico con la métrica

$$\tau((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \rho(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2).$$

Demostrar que $K \times L$ es compacto.

(b) Comprobar de las funciones de la forma

$$h(x, y) := \sum_{k=1}^m f_k(x) g_k(y),$$

con $m \in \mathbb{N}$, cada $f_k \in C(K)$ y $g_k \in C(L)$, forman un subespacio denso de $C(K \times L)$.

Ejercicios sobre espacios de Hilbert

En estos ejercicios, \mathcal{H} es un espacio de Hilbert, con producto escalar $(x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$.

Ejercicio 4.1. Demostrar, con el uso de la ley de cosenos, el siguiente teorema de la geometría euclidiana: si $ABCD$ es un paralelogramo con diagonales AC y BD , entonces

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2.$$

Ejercicio 4.2. Demostrar el teorema de Jordan y von Neumann: si E es un espacio normado cuya norma cumple la ley del paralelogramo, las siguientes fórmulas definen un producto escalar compatible con esa norma:

$$\Re \langle x | y \rangle := \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2), \quad \Im \langle x | y \rangle := \frac{1}{2}(\|x - iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

(a) Comprobar primero la relación siguiente, para $x, y, z \in E$:

$$\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|y + z\|^2 + \|z + x\|^2.$$

[[Indicación: considerar un paralelepípedo con vértices $0, x, y, z$.]] Concluir que $\Re \langle x | y + z \rangle = \Re \langle x | y \rangle + \Re \langle x | z \rangle$.

(b) Deducir que $\Re \langle x | \alpha y \rangle = \alpha \Re \langle x | y \rangle$ para $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sucesivamente.

(c) Mostrar que $\Re \langle x | ix \rangle = 0$. Concluir que $\langle x | y \rangle := \Re \langle x | y \rangle - i \Re \langle x | iy \rangle$ cumple todas las propiedades de un producto escalar en E , y que $\langle x | x \rangle = \|x\|^2$.

Ejercicio 4.3. En el espacio de Banach $C([0, 1])$, encontrar dos funciones f, g tales que $f(t)g(t) \equiv 0$ mientras $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty = 1$. Concluir que este espacio de Banach no es un espacio de Hilbert.

Ejercicio 4.4. (a) Demostrar que la norma en un espacio de Hilbert *real* \mathcal{H} es una función diferenciable fuera de 0; si $f: \mathcal{H} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ está dada por $f(x) := \|x\|$, mostrar que

$$f'(x)u = \frac{\langle x | u \rangle}{\|x\|} \quad \text{para } x \neq 0, u \in \mathcal{H}.$$

[[Indicación: considerar $g(x) := \|x\|^2$.]]

(b) Si $a \in \mathbb{R}$, $h(x) := \|x\|^a$ para $x \neq 0$, comprobar que $h'(x)u = a\langle x | u \rangle \|x\|^{a-2}$. Deducir una fórmula para las derivadas parciales $\partial/\partial x_j(r^a)$ cuando $r = \|x\|$ en \mathbb{R}^n .

(c) Demostrar que la norma $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$ no es diferenciable en el punto $x = (1, 0)$ en \mathbb{R}^2 .

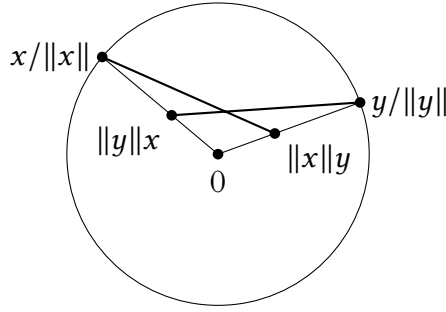


Figura 4.4: El lema de simetría

Ejercicio 4.5. Si E es un espacio prehilbertiano y si $x, y \in E \setminus \{0\}$, comprobar el *lema de simetría* (véase la Figura 4.4):

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\|x \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\|.$$

Ejercicio 4.6. La matriz de Gram de n vectores $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ es la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ con entradas $a_{ij} := \langle x_i | x_j \rangle \in \mathbb{C}$; su **determinante de Gram** es la función $G(x_1, \dots, x_n) := \det A$.

- (a) Mostrar que A es (semidefinida) positiva: $\langle z | Az \rangle \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$. Concluir que $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$.
- (b) Si $n \leq \dim \mathcal{H}$, mostrar que x_1, \dots, x_n son linealmente independientes en \mathcal{H} si y solo si $G(x_1, \dots, x_n) > 0$.
- (c) Deducir la desigualdad de Schwarz del caso $n = 2$. En el caso $n = 3$, comprobar la relación, para $x, y, z \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$:

$$\frac{|\langle x | y \rangle|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} + \frac{|\langle y | z \rangle|^2}{\|y\|^2 \|z\|^2} + \frac{|\langle z | x \rangle|^2}{\|z\|^2 \|x\|^2} \leq 1 + 2\Re \frac{\langle x | y \rangle \langle y | z \rangle \langle z | x \rangle}{\|x\|^2 \|y\|^2 \|z\|^2}.$$

Ejercicio 4.7. En el espacio vectorial $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, la norma $\|A\|_F := \sqrt{\text{tr}(A^*A)}$ de Frobenius es equivalente a la **norma operatorial** de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$:

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq 1\}.$$

La matriz A^*A es positiva, con autovalores $\mu_1^2 \geq \mu_2^2 \geq \dots \geq \mu_n^2 \geq 0$. Usar la relación $\|Ax\|^2 = \langle x | A^*Ax \rangle$ para mostrar que $\|A\| = \mu_1$ y para obtener las cotas exactas:⁸

$$\|A\| \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|.$$

Exhibir dos matrices B, C tales que $\|B\| = \|B\|_F$ y $\|C\| = \sqrt{n} \|C\|$.

⁸Los números no negativos $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ son los **valores singulares** de la matriz A .

Ejercicio 4.8. (a) Sea $\{u_j : j \in A\}$ una familia ortonormal en \mathcal{H} , y sea F el espacio \mathbb{C} -vectorial generado por los vectores u_j . Comprobar que $\{u_j : j \in A\}$ es total en \mathcal{H} si y solo si F es un subespacio denso de \mathcal{H} .

(b) Si $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto numerable denso en \mathcal{H} , demostrar que el algoritmo de Gram y Schmidt, aplicado a D (o bien a una parte de D) produce una base ortonormal numerable para \mathcal{H} .

Ejercicio 4.9 (Factorización de Cholesky). Sea $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz definida positiva. Defínase una función de dos variables sobre \mathbb{C}^n por

$$\langle\langle w | z \rangle\rangle := \sum_{i,j=1}^n \bar{w}_i a_{ij} z_j.$$

- (a) Comprobar que $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle$ es un producto escalar sobre \mathbb{C}^n .
- (b) Encontrar un juego de vectores $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}^n$ y una matriz triangular superior $B \in M_n(\mathbb{C})$ tales que

$$b_{ii} > 0, \quad \langle\langle y_i | y_j \rangle\rangle = 0 \text{ para } i \neq j, \quad e_j = \sum_{k=1}^j b_{jk} y_k$$

para $i, j = 1, \dots, n$; donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base estándar de \mathbb{C}^n . [Indicación: usar el algoritmo de Gram y Schmidt sin normalización.]

- (c) Comprobar que $A = B^* B$ de manera única: si $A = C^* C$ donde C es triangular superior con entradas diagonales positivas, entonces $C = B$.

Ejercicio 4.10. El espacio de Hilbert ℓ^2 tiene base ortonormal estándar $\{e_0, e_1, \dots, e_n, \dots\}$. Considérese la familia de vectores:

$$u_1 := \frac{e_0 - e_1}{\sqrt{2}}, \quad u_2 := \frac{e_0 + e_1 - 2e_2}{\sqrt{6}}, \quad \dots \quad u_n := \frac{e_0 + e_1 + \dots + e_{n-1} - ne_n}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \dots$$

Demostrar que $\{u_1, \dots, u_n, \dots\}$ es otra base ortonormal de ℓ^2 . Concluir que

$$F := \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{k=0}^{\infty} x_k = 0 \right\}$$

es un subespacio denso de ℓ^2 .

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo real. Si $\rho: I \rightarrow (0, \infty)$ es una función positiva continua y si hay un par de constantes $A, C > 0$ tales que $\rho(t) \leq C e^{-At}$ para todo $t \in I$, dícese que ρ es una **función de peso** sobre I . Se sabe que los monomios $\{1, t, t^2, \dots\}$ forman una familia total⁹ en el espacio de Hilbert $L^2(I, \rho dt)$, cuyo producto escalar es

$$\langle f | g \rangle := \int_I \overline{f(t)} g(t) \rho(t) dt.$$

Ejercicio 4.11. Los **polinomios de Laguerre** $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ son los polinomios obtenidos de $\{1, t, t^2, \dots\}$ por el algoritmo de Gram y Schmidt, en el caso $I = [0, \infty)$, $\rho(t) := e^{-t}$. Su definición más directa es por la **función generatriz**:

$$w(t, s) \equiv \frac{e^{-st/(1-s)}}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) s^n \quad \text{para } t \geq 0; |s| < 1.$$

Calcular $L_n(t)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y verificar la ortonormalidad¹⁰

$$\langle L_m | L_n \rangle := \int_0^{\infty} L_m(t) L_n(t) e^{-t} dt = \llbracket m = n \rrbracket$$

para $m, n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 4.12. Los **polinomios de Hermite** $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ son proporcionales a los polinomios obtenidos de $\{1, t, t^2, \dots\}$ por el algoritmo de Gram y Schmidt, en el caso $I = \mathbb{R}$, $\rho(t) := e^{-t^2}$. Su definición más directa es por la **función generatriz**:

$$w(t, s) \equiv e^{2st-s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) \frac{s^n}{n!} \quad \text{para } s, t \in \mathbb{R}.$$

Calcular $H_n(t)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y verificar la ortogonalidad

$$\langle H_m | H_n \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt = 0 \quad \text{cuando } m \neq n$$

para $m, n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Obtener también las constantes¹¹ $A_n := \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t)^2 e^{-t^2} dt$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

⁹Para una prueba, véase el Lema 16.2.1 del libro: Ph. Blanchard y E. Brüning, *Mathematical Methods in Physics*, Birkhäuser, Boston, 2003.

¹⁰Las **funciones de Laguerre** $l_n(t) := e^{-t/2} L_n(t)$ son reales y forman una base ortonormal para $L^2([0, \infty))$.

¹¹Conviene usar la fórmula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Las **funciones de Hermite** $\underline{h}_n(t) := A_n^{-1/2} e^{-t^2/2} H_n(t)$ son reales y forman una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4.13. Los polinomios de Chebyshev $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ son proporcionales a los polinomios obtenidos de $\{1, t, t^2, \dots\}$ por el algoritmo de Gram y Schmidt, en el caso $I = (-1, 1)$, $\rho(t) := 1/\sqrt{1-t^2}$. Su definición directa es

$$T_n(\cos \theta) := \cos n\theta, \quad \text{para } -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Verificar la ortogonalidad

$$\langle T_m | T_n \rangle := \int_{-1}^1 T_m(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0$$

para todo $m \neq n$ en \mathbb{N} . Calcular el valor de esta integral cuando $m = n$. Demostrar también la relación de recurrencia para $n \geq 2$:

$$T_n(t) - 2t T_{n-1}(t) + T_{n-2}(t) \equiv 0.$$

Ejercicio 4.14. Las funciones de Haar ψ_{nk} , para $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, son funciones escalonadas en el intervalo $[0, 1]$ definidas por

$$\psi_{nk}(t) := 2^{n/2} \psi(2^n t - k), \quad \psi(t) := \mathbb{I}[0 \leq t < \frac{1}{2}] - \mathbb{I}[\frac{1}{2} \leq t < 1].$$

- Graficar las funciones $\psi = \psi_{00}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{20}, \psi_{22}, \psi_{22}, \psi_{23}$.
- Demostrar que los ψ_{nk} constituyen una familia ortonormal¹² en el espacio de Hilbert $L^2([0, 1])$.
- Si $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, demostrar que f es un límite *uniforme* – sobre el intervalo $[0, 1]$ – de combinaciones lineales de funciones de Haar. [Indicación: considerar primero el caso especial de una función constante.]
- Concluir que $\{\psi_{nk} : n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n\}$ es una *base ortonormal* de $L^2([0, 1])$.

Ejercicio 4.15. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, comprobar que $\|Tx\|^2 \leq \|T^*T\| \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Concluir¹³ que $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Ejercicio 4.16. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, demostrar que $T^*T = TT^*$ si y solo si $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

¹²Una función R -integrable f tal que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$ representa un elemento de $L^2([0, 1])$, aunque tenga un número finito de discontinuidades.

¹³Una C^* -álgebra es un álgebra de Banach involutiva A tal que $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in A$. Un famoso teorema de Gelfand y Naïmark (1943) asegura que A es isomorfa a una subálgebra cerrada de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, donde \mathcal{H} es algún espacio de Hilbert (posiblemente inseparable).

En los ejercicios que siguen, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función periódica de período 2π . Sus coeficientes de Fourier son las integrales $c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(\theta) d\theta$.

Ejercicio 4.17. Si la serie de funciones $\theta \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$ converge uniformemente en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con suma $f(\theta)$, demostrar que esta serie coincide con la serie de Fourier de la función f .

Ejercicio 4.18. Sea f una función periódica de clase C^1 .

- (a) Comprobar que las coeficientes de Fourier de f' son $\tilde{c}_k := ik c_k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- (b) Demostrar que las siguientes dos series numéricas son convergentes:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2) |c_k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

- (c) Concluir que la serie de Fourier de f converge absoluta y uniformemente en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y que la suma coincide con la función f .

Ejercicio 4.19. Si $f, g \in C([-\pi, \pi])$ son periódicas de período 2π , con series de Fourier respectivas $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta}$ y $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{ik\theta}$, demostrar que la **convolución**

$$\underline{f * g}(\theta) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \phi) g(\phi) d\phi$$

tiene la serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{ik\theta}$$

y que esta serie converge absolutamente [Indicación: usar la desigualdad de Schwarz] y uniformemente en θ . Concluir que la función $f * g$ es también continua y que la suma de la serie de Fourier es $f * g(\theta)$. [Indicación: Ejercicio 4.17.]

Ejercicio 4.20. Usar la serie de Fourier para la función periódica impar dada por $f(\theta) := \theta$ cuando $-\pi < \theta \leq \pi$, para comprobar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\operatorname{sen} k\theta}{k} = \frac{\theta}{2} \quad \text{cuando} \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Deducir la fórmula de Gregory:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejercicio 4.21. Usar la serie de Fourier para la función periódica par dada por $f(\theta) := |\theta|$ cuando $-\pi \leq \theta \leq \pi$, para comprobar que

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\theta}{(2m+1)^2} \quad \text{cuando} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Deducir las fórmulas de Euler:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejercicio 4.22. Usar la serie de Fourier para la función periódica impar definida por $f(\theta) := \theta(\pi - |\theta|)$ cuando $-\pi \leq \theta \leq \pi$, para obtener la fórmula

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Índice General

Introducción	I
I Prolegómenos sobre análisis en \mathbb{R}	3
1.1 Los números reales y complejos	3
1.2 Funciones continuas sobre intervalos reales	9
1.3 Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy	18
1.4 Convergencia uniforme de funciones	24
1.5 Aproximación de funciones continuas por polinomios	30
2 Espacios métricos y su topología	38
2.1 Conjuntos abiertos y cerrados	38
2.2 Conjuntos compactos en espacios métricos	46
2.3 Espacios métricos completos	52
2.4 Espacios métricos conexos	58
3 Espacios normados y espacios de funciones	62
3.1 Normas	62
3.2 Series en espacios de Banach	73
3.3 Aplicaciones y formas lineales continuas	76
3.4 Diferenciación en espacios de Banach	87
3.5 El teorema de Stone y Weierstrass	92
4 Espacios de Hilbert y series de Fourier	97
4.1 Productos escalares y espacios de Hilbert	97
4.2 La geometría de los espacios de Hilbert	109
4.3 Introducción a las series de Fourier	116
4.4 Apéndice: el (otro) teorema de representación de Riesz	126
Ejercicios	134
Ejercicios sobre análisis en \mathbb{R}	134
Ejercicios sobre espacios métricos	140
Ejercicios sobre espacios normados	144
Ejercicios sobre espacios de Hilbert	150